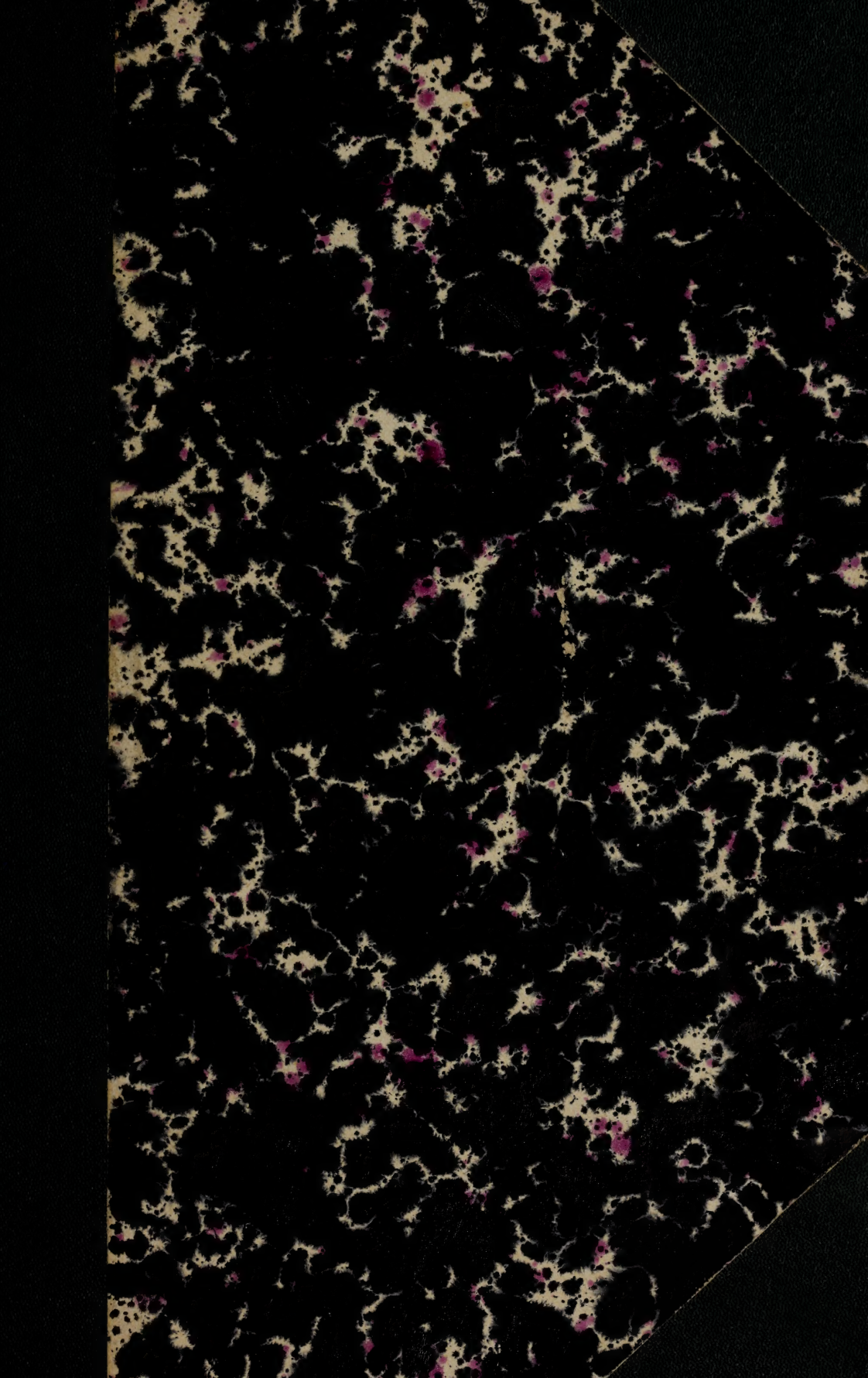


SOC
7130

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167.

Exchange.

February 5, 1910.

167

MÉMOIRES

LIBRARY
MUS. COMP. ZOÖLOGY

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VIII.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Hermann, libraire,	chez Friedländer u. Sohn.
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 6.	Karlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112

1909

FEB 5 1910

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VIII.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez WILLIAMS et NORGATE,	chez HERMANN, libraire,	chez FRIEDLÄNDER u. Sohn
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 6.	Karlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112

1909

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME VIII.

1. Contribution à l'anatomie des Amarantacées; par A. Gravis.
2. Notes de géométrie; par Lucien Godeaux.
3. Sur une surface particulière du septième ordre; par Jean Degueldre.
4. Éléments d'analytique sphérique; par G. Cesàro.
5. Sur une poudre brune à aspect gras à odeur de pétrole, provenant du charbonnage de La Haye. Étude optique de quelques pholérites belges; par Arthur Abraham.
6. La pholérite; par G. Cesàro.
7. Note sur les hypocycloïdes tricuspidales inscrites à un triangle fixe; par A. Gob.
8. Sur la transformation d'intégrales à circuit fermé en intégrales à circuit ouvert; par M. Beaupain.
9. Études de géométrie synthétique; par Lucien Godeaux.
10. Sur quelques générations des coniques et des quadriques; par J. Malaise.
11. Sur quelques lieux géométriques dans l'espace; par Neuberg et Degueldre.
12. Relations entre les volumes de certains tétraèdres; par J. Neuberg.
13. Sur la variation des latitudes; par Henry Janne.
14. Sur l'hypocycloïde de Steiner (4e note); par A. Gob.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(AOUT 1909).

Bureau.

Président,	MM. J. Neuberg.
Vice-Président,	A. Gravis.
Secrétaire général,	C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	J. Fairon.

Membres effectifs.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1878 le Paige, C., administrateur inspecteur de l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 Fraipont, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Ubaghs, P., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1885 Gravis, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1887 Lohest, M., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur en chef au corps des mines.

1897 Cesàro, G., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1898 Hubert, H., professeur à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1900 Lonay, H., docteur en sciences, chargé de cours à l'École spéciale de commerce annexée à l'université.

1902 Dehalu, M., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

Fairon, J., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1906 Abraham, A., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1909 Gob, A., professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Liége.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.

1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.

1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.

Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

1872 Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.

Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.

1873 Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., directeur du bureau central météorologique de France, à Paris.

Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.

Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.

Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.

Laisant, C.-A., à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).

1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.

Guccia, professeur à l'université de Palerme.

Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.

Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.

Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.

1898 Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.

Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.

Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

1902 Versluys, W.-A., docteur en sciences, à Delft.

1904 Lerch, Math., professeur à l'université de Fribourg (Suisse).

1904 Schönfliess, professeur à l'université de Kœnigsberg.

Capelli, Alfr., professeur à l'université de Naples.

Meyer, Franz, professeur à l'université de Kœnigsberg.

W. Kapteyn, professeur à l'université d'Utrecht.

1905 Traube, professeur, à Berlin.

II. — Sciences naturelles.

1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.

Lucas, H., naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1870 Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1875 Glaziou, botaniste, à Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur à l'université de Lund.

1874 Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, directeur du *Britisch Museum (Natural history)*.

Packard, professeur à l'université de Salem.

Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.

Strasburger, professeur à l'université de Bonn.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.

Bolivar, I., professeur, à Madrid.

Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

1881 Taramelli, professeur à l'université de Pavie.

Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gènes.

1881 Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.

1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

1898 Agassiz, Alexandre, à Cambridge (Mass.).

Bertrand, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.

Blanchard, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris

1904 Durand, Th., directeur du Jardin botanique de l'État à Bruxelles, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Barrois, C., professeur à l'université de Lille.
Boule, Marcellin, professeur au Muséum, à Paris.
Oehlert, D., conservateur du Musée de Laval (Mayenne).
Portis, A , professeur à l'université de Rome.
von Koenen, A., professeur à l'université de Gœttingen.
de Loriol, P., géologue, à Fontenex.
Grand'Eury, F., ingénieur, à Saint-Étienne.
de Rouville, P., doyen honoraire, à Montpellier.
Cocchi, J., directeur du Musée, à Florence.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.
Société royale belge de botanique.

Liége. — *Société géologique.*
Association des élèves des Écoles spéciales.

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Magdebourg. — *Museum für Natur und Heimatkunde*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. ESCHERICH et GEGENBAUER, professeurs à l'université.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs JUEL et FOLDBERG (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*
Université.

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.
L'intermédiaire des mathématiciens, M. LAISANT (quai des Augustins, 55).

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Natural history Society.*
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze* (classe des sciences physiques et mathématiques).
Accademia delle Scienze (classe des sciences morales).

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Reale Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.
Société italienne pour l'avancement des sciences.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal Grand-Ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société botanique du grand-duché de Luxembourg.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *Académie technique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

NORWÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*
Videnskabs Selskabet.

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

PORTUGAL.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

Porto. — *Académie polytechnique, directeur :* M. Gomès Teixeira

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Kischinew. — *Société des naturalistes de Bessarabie.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

Varsovie. — *Wiadomosci matematyczne.*

SUÈDE.

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Genève. — *L'enseignement mathématique*, directeurs : MM. Fehr et Laisant (rue Plantamour, 19).

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

—

ÉTATS-UNIS.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge (Mass.). — *Museum of comparative Zoology.*

Chicago. — *Field Museum of natural history.*

Cold Spring Harbor (N.Y.). — *Carnegie Institution (station for experimentale evolution;* directeur : M. C. B. Davenport).

Colorado. — *Colorado College* (bureau des publications),

Des Moines (Iowa). — *Geological Survey.*

Lawrence (Kan). — *The Kansas University.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*
Geological Survey.

Nebraska. — *University.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*
American Association for advancement of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Urbana (Ill.). — *University of Illinois library.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*
Bureau of ethnology.

CANADA.

Halifax. — *Nova Scotian Institute of natural Science.*

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canado.

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Merida. — *Observatoire.*

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

URUGUAY.

Montevideo. — *Museo nacional.*

ASIE.

—

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

—

Adelaïde. — *Royal Society of South Australia.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Australian Association for advancement of science.*
Linnean Society.
Royal Society of New South Wales.

CONTRIBUTION

À

L'ANATOMIE DES AMARANTACÉES

PAR

A. GRAVIS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Avec la collaboration de M^lle^ Constantinesco

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES

INTRODUCTION

La tige des Amarantes est généralement considérée comme anomale à cause du grand nombre et de la disposition de ses faisceaux. Nous nous sommes proposé de rechercher quel est le parcours de ces faisceaux, parce qu'il constitue, semble-t-il, un type non encore décrit.

Nous avons reconnu la présence de faisceaux foliaires, de faisceaux gemmaires et de faisceaux anastomotiques, ainsi que l'existence de massifs libéro-ligneux secondaires. Ces derniers, souvent désignés sous les noms de faisceaux secondaires ou surnuméraires, prennent naissance d'une façon très spéciale qui a été fort controversée. Nous avons saisi l'occasion qui nous était offerte de reprendre l'examen de ce sujet.

Notre travail sera donc divisé en deux parties : dans la première, nous nous occuperons du parcours des faisceaux en cherchant surtout à préciser la forme des traces foliaires et celle des traces gemmaires; dans la seconde, nous étudierons le mécanisme de l'accroissement diamétral secondaire résultant de la formation des massifs libéro-ligneux secondaires. Les questions relatives à l'histologie proprement dite n'ont pas fixé notre attention : elles n'offrent, dans le cas présent, aucun intérêt particulier.

Nous exposerons d'abord nos recherches, puis nous analyserons les travaux de nos devanciers et nous comparerons nos

résultats aux leurs. Nous terminerons par un résumé où les personnes qui ne désirent pas nous suivre dans le détail de notre étude trouveront l'énoncé concis de nos observations et de nos conclusions.

Les plantes qui ont fourni les matériaux de notre travail étaient dénommées *Amarantus flavus* L. Cette détermination nous paraissant erronée, nous avons analysé soigneusement nos exemplaires et nous avons cru pouvoir les rattacher à l'*Amarantus caudatus* L. var. *albiflorus*. Cette variété est désignée aussi sous les noms d'*Amarantus pendulinus* ou *A. pendulus* (1).

Pour plus de sûreté, nous avons soumis des spécimens de notre plante à M. le Dr H. Schinz, le réputé monographe des Amarantacées et des familles voisines. Ce botaniste a bien voulu nous faire savoir qu'il s'agit d'une forme de l'*Amarantus caudatus* L., mais que la détermination rigoureuse des Amarantes cultivées dans les jardins botaniques est rendue très difficile par le fait des croisements qui s'opèrent entre diverses espèces.

Nous adressons nos remercîments à M. le Dr H. Schinz pour les renseignements qu'il nous a transmis et qui nous permettent de considérer la plante que nous avons étudiée comme appartenant réellement à l'*Amarantus caudatus* L. Une détermination plus complète n'est pas nécessaire ici, attendu que nous envisageons notre sujet au point de vue de l'anatomie générale et non au point de vue de la diagnose anatomique des espèces.

---

(1) Moquin dans le *Prodrome* de de Candolle, Pars XIII, p. 255.

CONTRIBUTION

À

L'ANATOMIE DES AMARANTACÉES

CHAPITRE PREMIER

PARCOURS DES FAISCEAUX

§ I. — TYPE.

Pour étudier le type structural de l'Amarante, il nous a paru utile de rechercher d'abord quel est le parcours des faisceaux dans la région qui porte les plus grandes feuilles : nous avons choisi à cet effet les segments 8 à 13 d'une tige principale très vigoureuse, complètement développée, qui mesurait 1^m40 depuis l'insertion des cotylédons jusqu'au sommet de l'inflorescence (1). La divergence foliaire étant égale à $^2/_5$ de circonférence dans la région examinée, c'est donc un cycle phyllotaxique complet que nous avons minutieusement exploré au moyen de coupes transversales successives dans les nœuds et de coupes transversales échelonnées de distance en distance dans les entre-nœuds. La figure 1 reproduit l'aspect extérieur de cette portion de tige qui mesurait 31 centimètres de longueur.

Le nœud ^{14} a fourni, en outre, une série de coupes longitudinales successives pratiquées parallèlement au plan de symétrie. Le nœud ^{13} enfin a été débité en coupes longitudinales succes-

(1) Par segment, nous entendons un nœud de la tige avec l'entre-nœud précédent.

sives faites perpendiculairement au plan de symétrie. Ces deux nœuds avaient une structure comparable à celle des six nœuds précédents.

Les coupes mesuraient généralement 15 millimètres de diamètre. Elles ont été dessinées, au moyen de l'appareil projecteur d'Edinger, sur des feuillets de papier transparent, afin de permettre la comparaison des croquis par superposition. Tous ces dessins ont été contrôlés en examinant les coupes de nouveau sous le microscope à grand champ de Nachet.

L'examen attentif de tous ces matériaux et leur comparaison avec ceux dont il sera question par la suite, nous ont permis de définir le type structural en le dégageant de tous les cas particuliers et accidents locaux.

Avant de commencer cette description, nous croyons qu'il ne sera pas inutile de préciser certains termes dont nous aurons à faire usage.

On peut envisager une tige quelconque comme formée par la décurrence des tissus constituant les feuilles et les rameaux. Dès lors, il est naturel de rechercher dans la tige les *traces foliaires* et les *traces gemmaires*, leur composition et leur agencement.

Par trace foliaire, il faut entendre l'ensemble des faisceaux qui proviennent d'une même feuille, en ne considérant que ceux qui n'ont encore subi aucune anastomose ; ces faisceaux restés libres sont dits *faisceaux foliaires* (1). Dans l'Amarante, chaque feuille donne à la tige un faisceau médian (M), deux faisceaux latéraux (L), deux faisceaux intermédiaires (*i*) et des faisceaux marginaux de divers ordres (m, m', m''....).

De même, par trace gemmaire, il faut entendre l'ensemble des faisceaux qui proviennent d'un même bourgeon ou rameau ; dans leur portion non encore anastomosée, ces faisceaux sont

(1) Il est regrettable que quelques auteurs prennent comme synonymes les termes *trace foliaire* et *faisceau foliaire* : c'est établir une confusion fâcheuse entre le tout et la partie!

qualifiés de *faisceaux gemmaires* et indiqués par le symbole G. Les uns viennent de la région centrale du bourgeon, les autres de la périphérie : les premiers sont dits internes (G. *i.*), les seconds externes (G. *e.*).

Dans leur course descendante, les foliaires et les gemmaires rencontrent des faisceaux auxquels ils s'unissent en se confondant avec eux. Ces complexes sont désignés sous le nom de *faisceaux anastomotiques* et indiqués par le symbole A.

Dans l'Amarante, nous aurons à considérer encore les *massifs libéro-ligneux secondaires* qui apparaissent tardivement à la périphérie des parties les plus âgées de la tige (1).

Dans toutes nos descriptions, nous suivrons le trajet des faisceaux de haut en bas ; nous commencerons donc au nœud ^{13} pour descendre jusque dans l'entre-nœud ^{8}.

I. — TRACE FOLIAIRE.

Le nombre des faisceaux contenus dans le pétiole de la feuille ^{13} est 25, comme l'indique la figure 2. A la base du pétiole, les trois faisceaux intermédiaires, situés de chaque côté du médian, s'unissent en un seul; de même les marginaux se réunissent pour ne constituer que trois faisceaux marginaux de chaque côté. Ces réunions sont indiquées par des accolades dans la figure 2.

Les 11 faisceaux ainsi constitués passeront dans la tige; ce sont les faisceaux :

$$m''m'm\,\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i\,\mathrm{L}\,m\,m'm''.$$

Dans le nœud ^{13}, une coupe représentée par la figure 5 (2)

(1) Pour plus de détails sur les catégories de faisceaux et l'historique de la question, voir A. Gravis, *Recherches anatomiques et physiologiques sur le Tradescantia virginica* (8, pp. 63 et 75), ainsi que l'*Anatomie comparée du Chlorophytum et du Tradescantia* (9, p. 15).

(2) Les niveaux correspondants aux coupes transversales sont indiqués dans le dessin d'ensemble de la figure 1.

montre la pénétration des faisceaux m' et m'' de chaque côté; une autre (fig. 7) permet de constater la pénétration des m L i M i L m.

Au milieu de l'entre-nœud [13] (fig. 8), la trace foliaire est complète puisqu'elle se compose encore des 11 faisceaux

$$m''m'm\,\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i\,\mathrm{L}\,m\,m'm''.$$

Ces faisceaux sont disposés en zigzag, les plus gros (L M L) étant les plus rapprochés du centre de la tige, les autres étant d'autant plus éloignés qu'ils sont plus petits. Cette disposition est caractéristique.

Un peu au-dessous de ce niveau, les faisceaux m'' se jettent sur les faisceaux les plus voisins. Il en est de même des m' vers le milieu de l'entre-nœud [12] (fig. 9); la trace foliaire, dès lors incomplète, ne comprend que les 7 faisceaux :

$$m\,\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i\,\mathrm{L}\,m.$$

Dans l'étendue de l'entre-nœud [10], les faisceaux m et L s'unissent aux faisceaux anastomotiques les plus proches. Vers le milieu de l'entre-nœud [10] (fig. 10), ces réunions sont déjà faites, sauf celle du faisceau latéral gauche qui est sur le point de s'accomplir.

Les foliaires i M i se retrouvent dans l'entre-nœud [9] (fig. 11); ils continuent à descendre dans la tige jusque sous le nœud [8] : là, ils s'anastomosent à leur tour (fig. 12). La trace foliaire du nœud [13] a donc complètement disparu : elle a fait place à la trace foliaire du nœud [8], laquelle ne comprend que 9 faisceaux.

Vu le grand nombre des faisceaux et leur disposition à des distances très inégales du centre de la tige, il n'est guère possible de représenter le parcours comme on le fait généralement en supposant la tige déployée dans un plan. Nous avons cependant essayé de donner trois représentations partielles.

Dans la première représentation (fig. 13), tous les faisceaux composant la trace foliaire et la trace gemmaire du nœud [13], ainsi que les faisceaux anastomotiques voisins, sont ramenés dans un plan tangent à la tige; ils ont été espacés de façon à ne pas

se confondre dans la figure. Le parcours est vu de face : il comprend six segments superposés (segments 8 à 13), mais il ne correspond qu'à l'un des cinq secteurs qui composent la tige.

La deuxième représentation (fig. 14) indique, dans le plan radial, le trajet des faisceaux de la moitié droite des mêmes traces foliaire et gemmaire. Le parcours est donc vu de profil, de façon à mettre en évidence le déplacement des faisceaux dans le sens du rayon de la tige. Les faisceaux représentés dans la figure 14 correspondent à ceux que l'on voit dans la portion de coupe transversale dessinée sous la figure. Ce demi-secteur équivaut à la dixième partie de la tige.

Dans les figures 13 et 14, les faisceaux foliaires sont indiqués par des traits fins, les gemmaires par des traits interrompus, les anastomotiques par de gros traits. A l'inspection de ces deux figures, on reconnaît que les divers faisceaux foliaires effectuent dans la tige un trajet de longueur différente. Partant du nœud ^{13}, on constate que les m'' parcourent la longueur d'un demi-entre-nœud environ ; que les m' parcourent presque deux entre-nœuds ; que les m et L descendent la longueur de trois à quatre entre-nœuds ; que les i et M ne s'anastomosent qu'après avoir parcouru librement cinq entre-nœuds.

La troisième représentation du parcours (fig. 15) est une sorte de projection schématique, sur un plan horizontal, des faisceaux de la trace foliaire (pointillés), des faisceaux de la trace gemmaire (hachurés) et des faisceaux anastomotiques voisins (laissés en blanc). Les flèches indiquent comment les foliaires et les gemmaires se terminent en s'unissant aux anastomotiques. Les faisceaux dont le contour est indiqué par quelques points appartiennent à d'autres traces foliaires et gemmaires.

L'étude qui a été faite des segments 8 à 13, reproduits par la figure 1, nous a permis de suivre dans toute leur longueur non seulement le trajet des faisceaux provenant de la feuille ^{13}, mais encore celui des faisceaux provenant des feuilles ^{12}, ^{11}, ^{10}, ^{9} et ^{8}. Nous pouvons donc noter exactement tous les faisceaux rencontrés au milieu de l'entre-nœud 9 (fig. 11). Cette coupe, vague-

ment pentagonale, montre nettement cinq traces foliaires séparées par cinq groupes de faisceaux anastomotiques rayonnants; le tout entouré d'une couronne de petits faisceaux dont il sera fait mention ultérieurement.

On remarquera d'abord deux traces foliaires complètes comprenant les 9 faisceaux *m'm* L *i* M *i* L *m m'* et correspondant aux feuilles 9 et 10 (lesquelles n'envoient pas de faisceaux *m''* dans la tige); ensuite une trace foliaire incomplète formée des faisceaux L *i* M *i* L et correspondant à la feuille 11; enfin deux traces foliaires très incomplètes, constituées seulement par les trois faisceaux *i* M *i* des feuilles 12 et 13.

Nous trouvons donc côte à côte, dans cette coupe, les trois états dans lesquels se présente une même trace foliaire lorsqu'elle est suivie dans son trajet descendant.

Les cinq traces foliaires d'un entre-nœud sont séparées par cinq groupes de faisceaux anastomotiques dont la disposition rayonnante est plus ou moins régulière. Dans chacun de ces groupes, les plus gros faisceaux sont les plus rapprochés du centre, les plus petits les plus éloignés.

Les faisceaux d'une trace foliaire ne se placent jamais entre les faisceaux d'une autre trace foliaire; ils ne s'interposent même pas aux faisceaux anastomotiques, comme on le constate dans un grand nombre de plantes. Dans l'Amarante, la tige est donc constituée par des secteurs bien distincts, au nombre de cinq dans la région type envisagée ici.

Nous avons constaté que la disposition des faisceaux foliaires est invariable dans tous les segments; aussi avec un peu d'expérience peut-on toujours les reconnaître et les déterminer exactement. La place où ils se terminent en s'anastomosant ne présente pas la même constance. En conséquence, nous ne chercherons pas à préciser le mode de terminaison des foliaires dans chaque cas particulier. Nous nous bornerons à formuler ceci : les faisceaux médians et les faisceaux latéraux se terminent en se jetant sur l'un des gros faisceaux anastomotiques les plus rapprochés du centre de la tige; les faisceaux marginaux se fusionnent aux faisceaux anastomotiques situés d'autant plus loin du centre qu'ils

sont eux-mêmes plus petits; le lieu d'anastomose des faisceaux intermédiaires est plus variable.

Habituellement les foliaires s'unissent aux anastomotiques situés du même côté qu'eux par rapport au plan de symétrie de la feuille. Cependant les foliaires latéraux et les foliaires intermédiaires du côté droit peuvent être rejetés contre les anastomotiques du côté gauche. Le contraire peut aussi s'observer. Ces faits semblent en rapport avec le sens de la spire phyllotaxique et l'augmentation du nombre des faisceaux dans les segments consécutifs (1).

Outre les 29 faisceaux foliaires et les 26 faisceaux anastomotiques dont nous venons de parler, la coupe représentée par la figure 11 contient 65 faisceaux gemmaires (indiqués par des hachures) et 160 massifs libéro-ligneux secondaires (indiqués en noir). Nous aurons à nous occuper de ces faisceaux gemmaires et de ces massifs libéro-ligneux secondaires dans la suite de notre travail.

II. — TRACE GEMMAIRE.

Le bourgeon situé dans l'aisselle de la feuille 13 s'est développé en un rameau long de 35 centimètres, dont le diamètre mesure 4 à 5 millimètres à la base. Ce rameau possède une structure assez semblable à celle de la tige principale : il renferme des faisceaux foliaires, des anastomotiques et une couronne de petits faisceaux périphériques. Tous ces faisceaux du rameau pénètrent dans la tige mère : c'est leur trajet descendant que nous allons suivre.

La section transversale représentée partiellement par la figure 3 a été pratiquée un peu au-dessus du nœud 13. La section pratiquée quelques millimètres plus bas (fig. 4) a rencontré l'insertion du rameau : les faisceaux gemmaires, c'est-à-dire les

---

(1) Ces résultats sont conformes à ceux obtenus dans le Tradescantia (8, pp. 83 et 84) et le Chlorophytum. Ils confirment également les vues émises par M. O. Lignier (12, 13 et 14). Il est donc acquis que l'étude des faisceaux foliaires est beaucoup plus importante que celle des faisceaux anastomotiques.

faisceaux provenant du rameau, y sont représentés couverts de hachures. On peut distinguer des gemmaires internes (G. *i.*) et des gemmaires externes (G. *e.*). On les retrouve dans la figure 5, dans laquelle on voit les gemmaires externes se disposer côte à côte et les gemmaires internes s'enfoncer dans la tige.

Au niveau de la rentrée des principaux faisceaux de la feuille [13] (fig. 7), les gemmaires externes (G. *e.*) sont interposés aux foliaires, tandis que les gemmaires internes (G. *i.*) se sont disposés parallèlement aux faisceaux anastomotiques (A) de la tige mère.

Dès le milieu de l'entre-nœud [13] (fig. 8), les G. *e.* se sont éparpillés à la phériphérie de la tige mère, et les G. *i.* ont été presque entièrement absorbés par les anastomotiques.

Plus bas (fig. 9 et 10), la trace gemmaire n'est plus représentée que par les petits faisceaux externes disposés en cercle à la périphérie. Ces petits faisceaux descendent parallèlement le long de cinq entre-nœuds, puis, refoulés vers l'intérieur, ils sont reçus par les anastomotiques dans la moitié supérieure du nœud [8].

En résumé, la trace foliaire et la trace gemmaire correspondante sont absorbées par les faisceaux anastomotiques qui encadrent ces deux traces : la première s'observe partiellement au moins dans toute l'étendue de cinq entre-nœuds, tandis que la seconde disparaît presque entièrement dans l'entre-nœud situé sous le nœud considéré. Seuls, les gemmaires externes persistent dans la tige mère pour y former la couronne de faisceaux périphériques.

Le parcours des faisceaux gemmaires est nettement reconnaissable dans nos figures 13 et 14 : les faisceaux descendant du rameau y sont indiqués en traits interrompus. Partant du nœud [13], on voit les gemmaires internes parcourir dans la tige la longueur d'un entre-nœud, puis se jeter sur les anastomotiques. Les gemmaires externes, au contraire, descendent la longueur de cinq entre-nœuds, puis, s'unissant à leur tour à des anastomotiques, ils laissent la place libre aux gemmaires externes du nœud [8].

La réalité de cette disposition est mise hors de doute par le contrôle résultant de l'examen d'une série de coupes successives

pratiquées longitudinalement dans le nœud 14, parallèlement au plan de symétrie de ce segment (fig. 16). Une seule coupe ne peut évidemment fournir un tracé aussi complet que celui de notre figure 16 : celle-ci a été obtenue par la superposition de trois dessins fournis par trois sections successives. Cette méthode permet de suivre un certain nombre de faisceaux en complétant un croquis par le suivant. Toutefois, elle n'est réellement démonstrative que quand elle vient corroborer l'étude attentive d'une série de coupes transversales successives dans une région comparable (série des figures 3 à 12).

Dans la figure 15 enfin, les faisceaux gemmaires sont désignés par des hachures ; les flèches montrent où se termineront ces faisceaux en s'unissant aux faisceaux anastomotiques laissés en blanc.

§ II. — VARIATIONS DU TYPE DANS L'ÉTENDUE DE LA TIGE.

La variation de la structure dans les diverses régions d'une même tige (indépendamment de la différence d'âge de ces régions) est un fait bien établi, mais trop négligé encore (1). On ne peut cependant se faire une idée suffisamment complète de l'organisation d'une plante, qu'en étudiant toutes ses parties : c'est à ce prix qu'il est possible de définir le type structural qui pourra ultérieurement être comparé à d'autres types structuraux établis de la même manière.

Distinguons d'abord les régions reconnaissables extérieurement dans la tige de l'amarante étudiée.

Caractères extérieurs.

Notre Amarante est une plante annuelle à croissance rapide.

---

(1) L'*Urtica dioïca* et le *Tradescantia virginica*, étudiés à ce point de vue, peuvent servir d'exemples bien démonstratifs.

Sa tige principale, qui dans les forts exemplaires atteint 1m70 de longueur, comprend toujours deux régions bien distinctes : l'une végétative, l'autre florifère.

La région végétative de la tige principale est verticale et compte habituellement 24 ou 25 segments. Chacun de ceux-ci porte une feuille pétiolée et un bourgeon axillaire. La taille des feuilles va en augmentant de la feuille 1 jusqu'à la feuille 14 ou 15, puis elle décroît un peu jusqu'à la dernière. Le développement des bourgeons axillaires suit les mêmes fluctuations : les bourgeons des six premiers nœuds donnent naissance à quelques feuilles très chétives; à partir du nœud 7 ou 8, le rameau s'allonge un peu, porte quelques feuilles et se termine par une inflorescence atrophiée; dès le nœud 10 ou 11, le développement est plus accentué : il atteint son maximum au nœud 14 ou 15, où le rameau peut mesurer 40 centimètres de longueur, porter une dizaine de feuilles et se terminer en une inflorescence; du nœud 15 ou 16 jusqu'au nœud 24 ou 25, le rameau est de moins en moins long, ses feuilles de moins en moins nombreuses; il se réduit finalement à la partie florifère (fig. 6).

La région supérieure de la tige principale est recourbée et retombante; elle constitue l'axe d'une grande inflorescence terminale qui peut atteindre 40 centimètres de longueur. Elle comprend une centaine au moins de segments portant chacun une bractée et une ramification axillaire. La première bractée, très aiguë, ne mesure que 8 millimètres de longueur (fig. 38). Elle contraste singulièrement avec la feuille précédente qui se compose d'un pétiole assez long et d'un limbe large ordinairement de 4 à 5 centimètres. Les bractées suivantes sont de plus en plus petites (fig. 39).

Les bourgeons situés dans l'aisselle des premières bractées donnent naissance à des rameaux florifères; les autres se développent en petites cymes compactes, qui ne sont pas représentées dans la figure 6 à cause de leur taille trop exiguë.

Tous les appendices de la tige principale (feuilles et bractées) sont rangés suivant une seule et même spire (fig. 17) qui est dextre dans certains individus, sénestre dans les autres. Parmi

100 tiges principales prises au hasard, nous avons compté 49 dextres et 51 sénestres (1).

L'angle phyllotaxique, qui mesure presque une demi-circonférence entre les feuilles 1 et 2, se réduit à $^2/_5$ dans la portion moyenne et à $^3/_8$ dans la portion supérieure de la tige principale.

Une même tige a été explorée dans toute son étendue. Une entaille bien droite, pratiquée dans toute la longueur de cette tige, a servi de repère pour l'orientation des coupes. Les parties les plus jeunes ont été soumises à l'inclusion dans la celloïdine et débitées au microtome; les autres ont été sectionnées à la main. Il a été fait usage de l'agar-agar pour fixer les coupes aux lames de verre (A. Gravis, **7**); l'éclaircissement a été obtenu par l'eau de Javelle et la coloration par l'hématoxyline après neutralisation par le bicarbonate de potasse (2).

En décrivant l'organisation de l'hypocotyle, de la région végétative et de l'axe de l'inflorescence de cette tige, nous aurons l'occasion de faire connaître dans quelles limites varie le type structural décrit précédemment. Nous ne parlerons pas de portions de tiges prélevées dans d'autres plantes dont l'étude a servi à compléter et à contrôler les résultats obtenus.

A. — HYPOCOTYLE.

L'hypocotyle et ses appendices (cotylédons) constituent une région distincte qui mérite un examen particulier. Bien qu'il soit possible de retrouver l'hypocotyle au bas de la tige principale

---

(1) Cette constatation est à rapprocher d'autres analogues qui ont été faites à propos du *Tradescantia virginica* (**8**, p. 60).

(2) Cette partie de notre travail est plus particulièrement l'œuvre de Mlle A. Constantinesco, qui a fait de nombreuses séries de coupes successives et exécuté à la chambre claire les dessins nécessaires pour établir le parcours des faisceaux dans toute l'étendue d'une même tige. Je me plais à reconnaître son habileté et sa persévérance; je tiens aussi à la remercier bien vivement de son utile collaboration. A. G.

lorsque la plante est adulte, il est préférable de l'étudier dans de jeunes plantules. Celles dont nous nous sommes servi montraient, outre les deux cotylédons, les quatre premières feuilles étalées et les deux suivantes en voie d'épanouissement (fig. 18).

Les figures 19 à 24 reproduisent quelques coupes choisies dans une série obtenue au microtome. La figure 20 correspond au niveau de l'insertion des cotylédons : *Cot. a.* désigne les deux faisceaux provenant du cotylédon antérieur; *Cot. p.*, les deux faisceaux venant du cotylédon postérieur; G. les faisceaux gemmaires cotylédonaires; A. les quatre faisceaux anastomotiques; $(L\ M\ L)^1$ la trace foliaire du premier nœud; $(L\ M\ L)^2$ celle du deuxième; enfin il y a une couronne de petits faisceaux périphériques non encore différenciés.

Dans une coupe faite un peu au-dessous de la précédente (fig. 21), on voit les foliaires latéraux des nœuds 1 et 2 s'unir aux anastomotiques. Au milieu de l'hypocotyle (fig. 22), les faisceaux A se sont rapprochés deux à deux et ont absorbé les foliaires médians. Dans la figure suivante (fig. 23), les faisceaux cotylédonaires se sont unis aux deux anastomotiques. Enfin, au niveau de la racine principale (fig. 24), on aperçoit la lame ligneuse du faisceau bipolaire flanquée, à droite et à gauche, d'un massif libéro-ligneux secondaire, prolongement inférieur des deux faisceaux anastomotiques constatés au niveau précédent. Cette même coupe contient d'autres massifs libéro-ligneux secondaires, prolongements inférieurs des faisceaux périphériques de l'hypocotyle.

En résumé, l'hypocotyle contient deux traces cotylédonaires et deux traces foliaires séparées par quatre anastomotiques, le tout entouré d'une couronne de faisceaux périphériques (nous négligeons les faisceaux gemmaires cotylédonaires très peu développés). Les traces cotylédonaires sont réduites, l'une et l'autre, à deux faisceaux latéraux sans faisceau médian.

On consultera utilement la figure 25, qui exprime le parcours des principaux faisceaux d'une plantule. Elle montre d'une façon synoptique ce que la série des coupes transversales (fig. 19 à 24) nous a appris.

B. — PORTION VÉGÉTATIVE DE LA TIGE.

Abstraction faite des changements résultant de l'âge des organes, deux facteurs régissent les modifications que présente la structure de la tige considérée dans toute son étendue : ce sont les variations de l'angle de divergence des feuilles et les variations du nombre des faisceaux foliaires dans les divers segments. Considérons ces deux facteurs successivement.

La disposition phyllotaxique des quatre premières feuilles semble indiquer deux paires de feuilles qui auraient été déplacées de façon à se ranger le long d'une seule spire : les angles de divergence sont successivement un peu plus petit que $^1/_2$, plus grand que $^1/_4$, et plus petit que $^1/_2$ (voir fig. 17). Du segment ^{3} au segment ^{21}, l'angle de divergence est égal à $^2/_5$ de circonférence. A partir du segment ^{21}, l'angle est réduit à $^3/_8$ (fig. 17).

Le nombre des faisceaux qui passent de la feuille dans la tige augmente du segment ^{1} aux segments de la portion moyenne, puis il va en diminuant. Dans la tige qui nous sert d'exemple, nous avons constaté :

La feuille ^{1} donne à la tige 3 faisceaux . . . L M L
La feuille ^{2} en donne 5 . . . . . L *i* M *i* L
Les feuilles ^{3} et ^{4} en donnent 7. . . . . .*m* L *i* M *i* L *m*
Les feuilles ^{5} à ^{12} en donnent 9. . . . . *m' m* L *i* M *i* L *m m'*
Les feuilles ^{13} à ^{15} en donnent 11 . . . *m'' m' m* L *i* M *i* L *m m' m''*
Les feuilles ^{16} à ^{21} en donnent 9 . . . . *m' m* L *i* M *i* L *m m'*
Les feuilles ^{22} à ^{24} en donnent 7 . . . . .*m* L *i* M *i* L *m*

La feuille ^{1} est la plus petite, la feuille ^{13} la plus grande; la feuille ^{24} est la dernière avant les bractées de l'inflorescence.

Nous avons figuré la coupe transversale du pétiole d'un cotylédon (fig. 26), ainsi que celle du pétiole des feuilles ^{1}, ^{3}, ^{5}, ^{13} et ^{20} (fig. 27, 28, 29, 33 et 34); ces coupes ont toutes été pratiquées à la base de l'organe. En les comparant, il faudra tenir

compte de ce que le grossissement des deux dernières est moindre que celui des autres (¹).

Le nombre des faisceaux qui passent d'une feuille dans la tige n'est pas toujours égal au nombre de faisceaux visibles dans la coupe faite à la base du pétiole, parce que certains faisceaux s'unissent avant de pénétrer dans la tige. Dans les figures 27, 33 et 34, les accolades indiquent les faisceaux qui se confondent en un seul pour entrer dans la tige.

Traces foliaires.

La section transversale au milieu de l'entre-nœud montre quatre traces foliaires séparées par quatre séries de faisceaux anastomotiques (fig. 30). Les traces foliaires 1 et 2 sont complètes : la première comprend trois faisceaux, la seconde cinq. Les traces foliaires 3 et 4 ne se composent ici que des faisceaux *i* M *i*.

C'est dans l'entre-nœud 3 (fig. 31) qu'apparaît une cinquième trace foliaire; celle-ci est réduite, à ce niveau, au seul faisceau M^7. Un coup d'œil jeté sur la figure 25 fera immédiatement saisir les relations existant entre les traces foliaires et les faisceaux anastomotiques. Cette figure représente le parcours des principaux faisceaux dans l'hypocotyle et les premiers segments caulinaires de la plantule mentionnée au paragraphe précédent. Elle ne reproduit toutefois que les faisceaux les plus profonds; les autres, échelonnés vers l'extérieur, n'ont pu trouver place dans ce dessin.

Dès l'entre-nœud 5, les feuilles étant disposées à $^2/_5$ de circonférence les unes des autres et donnant à la tige chacune 9 faisceaux, on trouve la structure représentée par la figure 32 : cinq traces foliaires, dont une complète

$$(m'm\,\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i\,\mathrm{L}\,m\,m')^5,$$

(¹) M. L. Petit (19, p. 24 et pl. II, fig. 37) a décrit et figuré la coupe faite au sommet du pétiole de l'*Amarantus caudatus*. Cette différence de niveau explique la différence d'aspect qu'on reconnaîtra en rapprochant son dessin des nôtres.

une presque complète

$$(m\,\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i\,\mathrm{L}\,m)^{6},$$

une incomplète

$$(\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i\,\mathrm{L})^{7},$$

deux fort incomplètes

$$(i\,\mathrm{M}\,i)^{8} \text{ et } (i\,\mathrm{M}\,i)^{9}.$$

Cinq séries de faisceaux anastomotiques séparent ces traces foliaires.

Le segment [13] porte la feuille la plus grande à laquelle correspond une trace de 11 faisceaux (fig. 35) :

$$m''m'm\,\mathrm{L}\,i\,\mathrm{M}\,i\,\mathrm{L}\,m\,m'm''.$$

Les quatre autres traces ont la même composition que dans la figure précédente.

C'est dans l'entre-nœud [17], qu'apparaît une sixième trace foliaire réduite au seul faisceau M^{22} (fig. 36). Les cinq autres traces ressemblent à celles des deux figures qui précèdent.

Enfin, dans l'entre-nœud [20] débute la disposition phyllotaxique $^{5}/_{8}$ (fig. 37). Les quatre premières traces foliaires, correspondant aux segments 20, 21, 22 et 23, sont complètes; celle du segment [24] est incomplète; les trois dernières (25, 26, 27) correspondent à trois bractées et ne possèdent, par conséquent, chacune qu'un seul faisceau (M). Le niveau rencontré par la coupe de la figure 37, appartient d'ailleurs à la portion de transition entre la région végétative de la tige et celle qui constitue l'axe de l'inflorescence.

Quelle que soit la disposition phyllotaxique et quel que soit le nombre des faisceaux, on remarquera que les traces foliaires sont toujours plissées et régulièrement séparées les unes des autres par des groupes de faisceaux anastomotiques.

Le nombre des traces foliaires visibles dans une coupe transversale est de quatre lorsque l'angle de divergence foliaire est de $^{1}/_{2}$ circonférence environ (segment [1] : fig. 30); il est de cinq lorsque les feuilles sont disposées suivant $^{2}/_{5}$ (fig. 35); il est de

huit quand elles sont disposées suivant $^3/_8$ (fig. 37). On peut observer six ou sept traces foliaires dans la région intermédiaire entre les dispositions phyllotaxiques $^2/_5$ et $^3/_8$ (fig. 36).

Traces gemmaires.

Qu'ils soient peu développés comme ceux insérés aux premiers nœuds de la tige principale, ou très vigoureux comme ceux portés par la région moyenne de cette tige, les rameaux ont toujours une trace conforme au type que nous avons décrit précédemment. Le nombre et la longueur des faisceaux gemmaires seuls varient. Nous croyons inutile d'insister davantage.

C. — AXE DE L'INFLORESCENCE.

L'axe de l'inflorescence formé d'une bonne centaine de segments, comprend deux parties : dans la première, constituée de 25 à 30 segments, les bourgeons axillaires se sont développés en rameaux florifères longs d'une dizaine de centimètres. Dans la seconde partie, les bourgeons ne produisent que de petites cymes serrées les unes contre les autres.

L'inflorescence qui termine la tige principale est donc composée d'une partie rameuse-paniculée, et d'une autre spiciforme-compacte [1]. Dans la figure 6, schématisée d'après une photographie, les proportions ont été rigoureusement observées, mais

---

(1) Dans l'aisselle des bractées de la partie spiciforme, comme dans l'aisselle de chacune des bractées portées par les rameaux de la partie paniculée, se trouve un petit glomérule de fleurs. Quelques coupes pratiquées dans des fragments soumis à l'inclusion nous ont montré que chaque glomérule est une cyme bipare comprenant une cinquantaine de fleurs. Dans les ouvrages de systématique, on attribue à l'*Amarantus caudatus* et aux espèces voisines, « des fleurs en épis » : il faudrait dire « des cymes disposées en épis et ceux-ci formant une panicule ».

les cymes n'ont pu être figurées parce qu'elles y seraient trop petites.

Quant aux appendices, ce sont des bractées uninerviées, de plus en plus petites (fig. 38 et 39), dont la disposition phyllotaxique est $^3/_8$.

Traces foliaires.

De chaque bractée descend dans l'axe de l'inflorescence un seul faisceau (M) qui parcourt librement la longueur de 8 entre-nœuds, puis se rapproche de l'un des anastomotiques auquel il se fusionne complètement deux ou trois entre-nœuds plus bas encore.

A titre d'exemples, nous figurons deux coupes de l'axe de l'inflorescence.

La première a été pratiquée dans l'entre-nœud ^{25} (fig. 40), c'est-à-dire à la base de la partie rameuse et paniculée de l'inflorescence. On y remarque 8 traces foliaires composées chacune d'un seul faisceau (M^{25} à M^{32}); elles sont séparées par 8 groupes de faisceaux anastomotiques (A). Les faisceaux M^{33} et M^{34} se rapprochent du faisceau anastomotique auquel ils doivent s'unir; le faisceau M^{35} a déjà opéré cette réunion. Tous les faisceaux désignés par des hachures sont gemmaires; nous en parlerons plus loin.

La seconde coupe a été faite dans l'entre-nœud ^{81} (fig. 41), niveau situé vers le milieu de la partie spiciforme et compacte de l'inflorescence. Cette section présente nettement 8 côtes, dont 5 principales et 3 plus petites. A ces côtes correspondent 8 traces foliaires réduites chacune au faisceau médian (M^{81} à M^{88}). Il y a seulement 8 faisceaux anastomotiques qui correspondent aux sinus du contour de la coupe. Les faisceaux M^{89}, M^{90} et M^{91} se rapprochent pour s'unir au faisceau anastomotique le plus voisin. Tous les autres faisceaux sont gemmaires.

L'organisation si simple de la partie supérieure de l'inflorescence contraste avec celle de la région végétative de la tige. Elle peut très aisément s'exprimer sous la forme de la figure 42 qui

reproduit le parcours des faisceaux foliaires et anastomotiques dans les segments 81 à 89. Chaque faisceau venant d'une bractée parcourt librement 8 entre-nœuds, puis se rapproche de l'anastomotique voisin auquel il s'unit intimement deux ou trois entre-nœuds plus bas.

Traces gemmaires.

Dans la partie inférieure paniculée de l'inflorescence, les rameaux sont assez développés : ils mesurent presque tous un décimètre de longueur. De ces rameaux descendent des faisceaux gemmaires assez nombreux. Les gemmaires internes pénètrent avec le faisceau M à l'intérieur de la tige ; les gemmaires externes, plus petits, restent à la périphérie (voir G.*i.* et G.*e.* dans la fig. 40). Tous se comportent comme les gemmaires de la région végétative, sauf que les internes sont ici notablement plus longs.

Dans la partie supérieure spiciforme de l'inflorescence, il n'y a qu'une petite cyme dans l'aisselle de chaque bractée ; aussi les faisceaux gemmaires sont-ils ordinairement réduits au nombre de six à chaque nœud : les deux internes, plus gros, accompagnent le M dans la tige ; les quatre externes, plus petits, restent à la périphérie (fig. 41). Les uns et les autres descendent la longueur de 8 entre-nœuds. L'insertion des cymes florifères appartient donc au même type que celle des rameaux feuillés, mais elle se fait par un petit nombre de faisceaux qui demeurent individualisés dans une grande étendue.

En résumé, la structure de l'axe de l'inflorescence est caractérisée par l'extrême réduction des traces foliaires composées chacune d'un seul faisceau (M), et par l'importance relativement plus grande des traces gemmaires constituées chacune de plusieurs gros faisceaux internes et de plusieurs petits périphériques, tous indépendants dans la longueur de plusieurs entre-nœuds (1).

(1) Ces caractères ont été signalés dans la hampe du *Chlorophytum elatum* (9, pp. 25 et suiv.) et se retrouveront probablement dans la plupart des axes d'inflorescence.

Toutefois cette caractéristique n'est bien établie que dans la portion spiciforme de l'axe de l'inflorescence, la portion paniculée formant la transition entre la région végétative de la tige et la région florifère terminale.

CHAPITRE II

ACCROISSEMENT DIAMÉTRAL SECONDAIRE

Aux dépens du méristème qui termine la tige prennent naissance des îlots de procambium séparés les uns des autres par du tissu fondamental. En se différenciant, ces îlots de procambium deviennent des faisceaux foliaires, gemmaires ou anastomotiques. Dans chacun de ces faisceaux, un arc cambial engendre une petite quantité de bois secondaire et de liber secondaire. En même temps, les cellules du tissu fondamental s'agrandissent notablement et se cloisonnent dans diverses directions. Il en résulte un certain accroissement du diamètre de la tige. Dans le cas qui nous occupe, cet accroissement est limité parce que le cambium des faisceaux devient bientôt inactif et parce que les cellules du tissu fondamental cessent de grandir et de se diviser.

Dans les Amarantacées, comme dans plusieurs familles voisines, la partie inférieure de la tige, l'hypocotyle et la racine principale sont le siège d'un développement de tissus secondaires qui s'opère suivant un mode très particulier. C'est ce développement que nous avons étudié dans notre *Amarantus caudatus*, en comparant les coupes pratiquées au milieu de l'entre-nœud [1] d'un certain nombre de tiges principales de plus en plus âgées. Nous avons choisi ce niveau parce qu'il est facile à préciser et parce que c'est en cet endroit que la tige subit le plus fort accroissement diamétral secondaire.

1. — TIGE.

Lorsque la tige d'une plantule mesure 3 centimètres environ de longueur, les quatre premières feuilles étant développées, la section transversale de l'entre-nœud [1] montre les faisceaux

foliaires et les faisceaux anastomotiques complètement différenciés; à la périphérie du cylindre central se trouvent de petits faisceaux procambiaux dans lesquels on reconnaît des cellules libériennes et l'apparition du cambium (fig. 43, pl. X). Ce sont les faisceaux gemmaires externes dont la différenciation est assez tardive. Dans la figure 43, comme dans les suivantes, les cellules du phlœoterme sont marquées d'une petite croix (1).

Dans une plante un peu plus âgée, on constate un premier recloisonnement tangentiel des cellules sous-phlœotermiques situées entre les faisceaux gemmaires (fig. 44) (2).

Des recloisonnements semblables se produisent plusieurs fois dans les mêmes cellules (fig. 45). Un peu plus tard, le même phénomène se manifeste aussi entre le liber des faisceaux gemmaires et le phlœoterme (fig. 46).

Ainsi se constitue une zone génératrice circulaire et continue qui fonctionne comme un cambiforme en produisant vers l'intérieur un peu de parenchyme que nous désignerons sous le terme de « tissu fondamental secondaire » (T*f*2) (3).

Plus tard, certaines cellules du cambiforme se cloisonnent plus fréquemment, deviennent plus petites et plus nombreuses.

---

(1) Sous le nom de *phlœoterme*, M. Ed. Strasburger (**22**, p. 484) a désigné l'assise la plus profonde de l'écorce, quels que soient ses caractères histologiques; il a proposé de réserver le terme *endoderme* pour les couches cellulaires pourvues de bandes radiales cutinisées, couches qui peuvent provenir de tissus différents au point de vue morphologique.

(2) Par *assise sous-phlœotermique*, nous entendons l'assise la plus extérieure du cylindre central de la tige, celle qu'on désigne souvent sous le nom de *péricycle*. Nous n'employons pas ce dernier terme parce qu'il n'est pas démontré que l'assise dont il s'agit soit réellement l'homologue du péricycle des racines.

(3) Avec M. Eg. Bertrand, nous désignons par le terme *cambiforme*, les zones génératrices secondaires dont les éléments se transforment en tissus dépourvus de vaisseaux et de cellules grillagées. Le terme *cambium* est réservé aux zones génératrices secondaires produisant du bois et du liber secondaires. Pour plus de détails, voir mémoire sur l'Urtica (**6**, pp. 30 et suiv.).

Des arcs de cambium prennent ainsi naissance çà et là vers la périphérie du cylindre central de la tige (1). La figure 47 montre du côté gauche un arc cambial (C*b.*) intercalé dans la zone cambiforme (C*bf.*); à droite, au-dessous, on trouve un faisceau gemmaire externe (G*e.*).

Les arcs cambiaux intercalés dans le cambiforme produisent extérieurement du liber secondaire et intérieurement du bois secondaire. Il en résulte des massifs libéro-ligneux secondaires situés un peu en dehors des faisceaux gemmaires externes. La figure 48 montre, à gauche, une portion d'un massif libéro-ligneux secondaire; les faisceaux gemmaires externes ne sont pas visibles dans ce dessin parce qu'ils sont situés plus profondément dans la tige.

Les massifs libéro-ligneux secondaires ne se développent pas indéfiniment : dès que l'activité de leur cambium se ralentit, des cloisonnements tangentiels se manifestent en dehors de leur liber. La zone cambiforme est ainsi reportée vers l'extérieur; elle pourra, en certains points, former plus tard des arcs cambiaux producteurs de nouveaux massifs libéro-ligneux secondaires. Elle produira aussi du tissu fondamental secondaire interposé entre les nouveaux massifs conducteurs secondaires.

Le déplacement vers l'extérieur de la zone génératrice se voit clairement dans la figure 49, qui reproduit partiellement deux massifs libéro-ligneux secondaires. Dans celui de gauche, l'arc cambial est en pleine activité (les cloisons nouvelles indiquées en pointillé sont nombreuses); dans celui de droite, l'arc cambial, au contraire, va bientôt cesser de fonctionner (les cloisons nouvelles sont peu nombreuses). En outre, en dehors du liber à droite, on constate un recloisonnement cambiforme qui n'existe pas encore à gauche.

On peut donc dire qu'à l'endroit représenté par la figure 49 et au moment où la coupe a été faite, la zone génératrice sautait

---

(1) L'*Urtica dioïca* présente aussi de nombreux exemples de la transformation locale du cambiforme en cambium (**6**, p. 33).

en arrière. Si la plante avait été laissée en vie, le même saut se serait produit un peu plus tard derrière le liber situé à gauche dans la figure.

Les mêmes phénomènes se répétant à diverses reprises, plusieurs cercles de massifs libéro-ligneux secondaires se manifesteront. A la vérité, ces cercles ne sont pas bien réguliers ni bien concentriques, parce que la zone génératrice nouvelle n'est pas complète d'emblée : elle n'embrasse d'abord qu'une partie de la circonférence et ne s'étalle que graduellement. C'est en se déplaçant vers l'extérieur par petits sauts successifs que la zone génératrice laisse, en dedans d'elle, des cercles plus ou moins concentriques de massifs libéro-ligneux secondaires dont l'arc cambial est éteint (1).

On peut se rendre compte de ce qui vient d'être dit par l'examen de la planche XIII, qui montre trois portions exactement comparables de coupes faites dans l'entre-nœud 4 de plantes d'âge différent.

Dans l'entre-nœud 4 d'une tige très jeune encore (fig. 50), on voit les faisceaux foliaires $(i\ M\ i)^5$ entre les faisceaux anastomotiques A et les faisceaux gemmaires externes G*e*; le cambiforme n'existe pas encore.

Dans la figure 51 correspondant à une tige presque adulte, on retrouve les mêmes faisceaux, plus une série de massifs libéro-ligneux secondaires issus de la zone génératrice en partie cambiforme, en partie cambiale. Au delà de cette zone généra-

---

(1) Les auteurs désignent généralement sous les noms de *faisceaux secondaires* ou de *faisceaux surnuméraires*, ce que nous avons nommé ici *massifs libéro-ligneux secondaires*. Il nous a paru nécessaire d'exprimer nettement la différence qui existe entre les faisceaux véritables et les massifs dont il s'agit.

Les faisceaux proviennent de la différenciation libéro-ligneuse d'îlots de procambium. Les massifs libéro-ligneux secondaires, au contraire, sont engendrés par des arcs de cambium sans état procambial préalable. Dans l'Amarante, les arcs cambiaux prennent naissance au sein d'une zone génératrice périphérique cambiforme.

trice, on aperçoit une deuxième zone génératrice qui n'existe qu'en certains endroits seulement.

Enfin, dans l'entre-nœud [1] d'une très vieille tige (fig. 52), il y a trois ou quatre cercles de massifs libéro-ligneux secondaires.

On peut, en outre, constater dans la figure 52 que l'accroissement diamétral de la tige de l'Amarante résulte, pour une part notable, de l'agrandissement et du recloisonnement diffus de toutes les cellules du tissu fondamental interfasciculaire, comme nous l'avons dit en commençant ce chapitre. En comparant les trois figures de la planche XIII, on verra que l'espace compris entre les faisceaux (i M i)[5] et les faisceaux G. *e.* augmente considérablement avec l'âge, surtout si l'on tient compte que la figure 50 est reproduite à un grossissement triple de celui des deux autres figures.

2. — HYPOCOTYLE ET RACINE.

Dans l'hypocotyle et dans la portion épaissie de la racine principale, les tissus secondaires sont plus développés encore que dans le bas de la tige principale. A l'endroit le plus épais de la racine, il y a souvent cinq ou six cercles assez réguliers de massifs libéro-ligneux secondaires séparés par du tissu fondamental secondaire dont les cellules très agrandies et étirées renferment d'abondantes réserves alimentaires (fig. 58).

Les figures 53 à 58 représentent au même grossissement six niveaux échelonnés dans une même racine. En comparant ces figures en commençant par la figure 53 (qui correspond au stade le plus jeune), on pourra aisément se rendre compte du mécanisme de la formation des zones génératrices successives et de la production des massifs libéro-ligneux secondaires. Ce mécanisme, chez l'Amarante, est le même dans la tige, l'hypocotyle et la racine.

La zone cambiforme prend naissance, après la décortication du parenchyme cortical, dans le péricycle recloisonné (C*bf.* de la fig. 53). Elle ne tarde pas à produire du tissu fondamental secondaire. Bientôt aussi des arcs cambiaux apparaissent dans la

zone cambiforme : il en résulte un premier cercle de massifs libéro-ligneux secondaires (fig. 54). Le déplacement de la zone génératrice en partie cambiforme et en partie cambiale se manifeste aux stades suivants (fig. 55 à 58). En même temps, les cellules du tissu fondamental secondaire se sont considérablement agrandies et ont amené la tubérisation de la racine; en comparant les figures 57 et 58, on remarquera combien les massifs libéro-ligneux secondaires les plus profonds se sont écartés les uns des autres à une époque relativement tardive.

3. — TRAJET DES MASSIFS LIBÉRO-LIGNEUX SECONDAIRES.

Il nous reste à indiquer l'extension des massifs libéro-ligneux secondaires et la forme de leur trajet.

Lorsque la plante est adulte, la zone génératrice s'étend dans toute la région végétative de la tige et dans les forts rameaux feuillés, mais elle ne pénètre pas dans l'axe de l'inflorescence. Elle règne aussi dans l'hypocotyle, la racine principale et les racines insérées sur celle-ci lorsqu'elles sont suffisamment développées. Son activité maxima réside dans la partie la plus renflée de la racine, l'hypocotyle et le segment [1]; elle va en diminuant de là jusqu'au segment qui porte la dernière feuille (ordinairement le segment 24 ou 25).

Les massifs libéro-ligneux secondaires ont, dans la tige, un trajet presque rectiligne; ils sont donc à peu près parallèles, mais ils échangent entre eux de loin en loin des anastomoses plus ou moins obliques. Ces massifs conducteurs n'ont aucun rapport direct avec les faisceaux foliaires et les faisceaux anastomotiques, mais nous croyons qu'ils ont d'assez nombreux points de contact avec les faisceaux gemmaires externes. Ils assurent ainsi une circulation facile de l'eau des racines vers les rameaux.

---

(1) Dans tous les dessins d'ensemble annexés à ce travail, les massifs libéro-ligneux secondaires sont figurés en noir (pl. I, II, III, VII, VIII, XIII et XIV). On remarquera l'absence complète de ces massifs dans l'axe de l'inflorescence (pl. IX).

HISTORIQUE

Depuis longtemps déjà, la structure de la tige des Amarantacées, Chénopédiées, Nyctaginées, etc., est considérée comme anomale tant au point de vue de la disposition et du parcours des faisceaux, qu'à celui de l'accroissement secondaire.

1. — *Disposition et parcours des faisceaux.*

La coupe transversale montre généralement un grand nombre de faisceaux éparpillés de telle sorte que les plus gros sont les plus rapprochés du centre, les plus petits, au contraire, les plus voisins de l'écorce. On y a décrit des faisceaux médullaires et des faisceaux périphériques, ces derniers affectant souvent la disposition de cercles concentriques plus ou moins réguliers.

Le parcours des faisceaux a été très peu étudié chez les Amarantacées. Dans l'*Amarantus caudatus* et l'*A. retroflexus*, DE BARY (**1**, p. 259) a vu les faisceaux se séparer les uns des autres en passant du pétiole dans la tige : quelques-uns, dit-il, se disposent en anneau, tandis que les autres pénètrent profondément dans la moelle, le médian de chaque trace foliaire paraissant se rapprocher le plus du centre. Les faisceaux d'une même trace restent rapprochés en un groupe, traversent plusieurs entre-nœuds dans leur trajet descendant, puis se réunissent. Aucune figure n'accompagne ce court énoncé. de Bary ajoute que de nouvelles recherches devraient être entreprises en vue de mieux connaître ce parcours.

M. VAN TIEGHEM (**24**, p. 757) n'est pas plus explicite. Il fait cependant un rapprochement entre l'organisation de la tige des Amarantes et celle des *Papaver, Actæa, Cimicifuga, Thalictrum* dont la tige présente, en section transversale, deux ou trois

cercles concentriques irréguliers. Ce rapprochement ne nous paraît pas justifié. Le parcours des faisceaux du *Thalictrum flavum*, bien élucidé par les recherches de Mansion (15), appartient en effet à un tout autre type : Dans l'*Amarantus*, chaque trace foliaire forme un groupe distinct, assez étroit, qui se place à côté de groupes analogues sans se mêler à eux; dans le *Thalictrum*, au contraire, chaque trace foliaire forme un cercle qui embrasse toute la tige et interpose ses faisceaux entre les faisceaux des traces précédentes.

M. G. Fron (4, p. 157) a fait quelques observations relatives au parcours des faisceaux dans plusieurs genres de Chénopodiées. Malheureusement, il s'est borné aux premiers segments de la tige principale de jeunes plantules en germination, de sorte qu'on ne peut pas se faire une idée du parcours des faisceaux dans la tige des plantes de cette famille.

2. — *Accroissement secondaire de la tige et de la racine.*

L'accroissement diamétral secondaire des axes dans les Amarantacées, Chénopodiées, Nyctaginées, etc., résulte, en partie, de la production de massifs libéro-ligneux qui apparaissent successivement, deviennent nombreux et sont habituellement rangés en cercles concentriques plus ou moins réguliers. Le mécanisme de cette production a préoccupé beaucoup d'anatomistes et a été diversement compris.

Les recherches de Unger, Link, Nägeli, Gernet, Regnault, Sanio, Pinger, etc., relatives à cette question, ont conduit de Bary (1, p. 607) à distinguer quatre cas ainsi caractérisés :

Dans le premier (racines de Chénopodiacées et d'Amarantacées, tige de *Phytolacca*, etc.), il se forme successivement et en direction centrifuge plusieurs anneaux de cambium, dont chacun forme un cercle de faisceaux vasculaires distincts (1). —

---

(1) Il est bien entendu que dans cet exposé historique, nous employons les termes dont les auteurs se sont servis, en conservant à ces termes le sens qu'ils leur donnaient.

Dans un deuxième cas (tiges de Nyctaginées, d'Amarantacées et de quelques Chénopodiacées), un anneau de cambium extra-fasciculaire reste continuellement actif et forme, à sa face interne, alternativement un faisceau vasculaire collatéral et du tissu conjonctif. — Dans le troisième et le quatrième cas (racine de *Mirabilis* d'une part, tige de quelques *Chenopodium* d'autre part), se réalisent des dispositions intermédiaires entre les deux premières.

M. Van Tieghem, dans la première édition de son *Traité de Botanique*, en 1884, ne distingue que deux cas (pp. 721, 723 et 797) : 1° Dans la racine des Chénopodiées et notamment dans la Betterave, des méristèmes tertiaires successifs produisent chacun un cercle de faisceaux libéro-ligneux tertiaires séparés par des rayons d'écorce tertiaire; le liber de ces faisceaux est formé en dehors de la zone génératrice, le bois en dedans; 2° Dans la racine du *Mirabilis*, au contraire, comme dans la tige des Chénopodiées, Amarantacées, Nyctaginées, etc., une seule assise génératrice donne naissance extérieurement à du parenchyme centripète, et intérieurement à du parenchyme centrifuge entremêlé de faisceaux libéro-ligneux secondaires. L'auteur insiste sur ce point, que l'assise génératrice engendre à la fois du liber et du bois sur sa face interne.

M. L. Morot (16, pp. 241, 246, 276, 279, 285, etc) établit, le premier, que le développement des faisceaux surnuméraires qui nous occupent ici suit partout une marche uniforme. Dans les racines, comme dans les tiges des plantes appartenant aux familles citées plus haut, plusieurs zones génératrices apparaissent successivement et produisent chacune du bois par leur face interne en même temps que du liber par leur face externe. Ces faisceaux collatéraux sont séparés par des rayons assez étroits de tissu conjonctif. Quant aux différences assez notables que l'on constate à l'état adulte, elles proviennent d'une part de l'agencement variable des zones génératrices successives, d'autre part de la sclérification plus ou moins rapide et plus ou moins complète du tissu conjonctif. Il est à noter aussi que les méristèmes consécutifs peuvent n'être point concentriques, mais anastomosés en

réseau à mailles plus ou moins étroites suivant que leurs points de contact sont plus ou moins nombreux.

Ainsi fut corrigée une grave erreur commise par les anciens anatomistes et consignée dans les Traités généraux de de Bary et de Van Tieghem. Il est maintenant établi que les massifs libéro-ligneux secondaires ne sont jamais engendrés tout entiers à la face interne de la zone génératrice surnuméraire : le bois est formé en dedans et le liber en dehors, comme dans le cas d'un cambium normal. Plusieurs zones génératrices semblables peuvent prendre naissance successivement en ordre centrifuge. D'autres fois les portions de la zone génératrice qui relient entre eux les massifs libéro-ligneux secondaires conservent leur activité, mais les arcs combiaux entre bois et liber s'éteignent toujours assez rapidement. Des ponts de méristème extralibériens se forment alors et rétablissent la continuité de la zone génératrice. C'est ce phénomène mal compris qui a fait croire à l'existence d'une seule assise génératrice produisant bois et liber à sa face interne.

Le texte du mémoire de M. Morot est d'une clarté parfaite, mais on peut regretter que les figures qui l'accompagnent, généralement trop partielles, ne soient pas suffisamment démonstratives.

Incidemment, l'auteur a montré aussi qu'il n'y a pas lieu d'attacher grande importance à la distinction entre les faisceaux dit secondaires et les faisceaux qualifiés de tertiaires. Nous partageons son avis (1).

M. J. Hérail, dans ses recherches sur l'anatomie comparée de la tige des Dicotylédones (**11**, p. 245), a fait sur d'autres espèces des constatations qui confirment pleinement les observations de M. Morot.

Les résultats remarquables obtenus par MM. Morot et Hérail ont été admis par M. Van Tieghem, qui en a tenu compte dans la deuxième édition de son *Traité de Botanique* (pp. 728 et 825).

---

(1) Voir plus loin, p. 36 : « Pour la même raison... tissu fondamental primaire ».

M. G. Fron, dans son étude de la racine, de l'hypocotyle et de la tige des Chénopodiacées (**4**), a eu l'occasion de contrôler et d'étendre encore les données nouvelles. Ce mémoire ne s'occupant pas des Amarantacées, ne doit pas être analysé ici; nous nous bornerons à signaler un bon dessin montrant clairement le déplacement de l'assise génératriee par rapport au massif libéro-ligneux secondaire déjà formé dans la tige du *Chenopodium album* (**4**, pl. 7, fig. 5).

Dans ses recherches sur l'appareil conducteur de la tige et de la feuille des Nyctaginées (**5**), M. F. Gidon a exposé des considérations d'anatomie générale dont nous aurons à nous occuper dans la suite de cet exposé historique.

Dans leur cours de Botanique (**3**, pp. 229, 376, 985), MM. G. Bonnier et Leclerc du Sablon consignent également les résultats acquis en prenant comme exemples la tige et la racine de Betterave : dans la première, une même assise génératrice se déplace en formant des boucles en dehors des massifs libériens; dans la seconde, plusieurs assises génératrices distinctes se produisent successivement. Entre ces deux types, il existe des intermédiaires chez les Chénopodiées, les Amarantacées et les Nyctaginées.

Quelques auteurs allemands conservent trop fidèlement la tradition de l'œuvre vénérable, mais un peu ancienne déjà, de de Bary. C'est ainsi que M. H. Schinz, dans sa monographie des Amarantacées écrite pour les *Pflanzenfamilien* de A. Engler et K. Prantl (**20**, p. 92), renseigne l'existence de plusieurs zones concentriques de faisceaux conducteurs plus ou moins régulièrement rangés. Le mode de formation de ces faisceaux, ajoute-t-il, a été trop peu étudié : d'après de Bary et Volkens, ils se développeraient comme dans les Chénopodiacées à tiges anomales.

M. H. Solereder, dans son anatomie systématique des Dicotylédones (**21**, p. 734), dit que chez les Amarantacées les faisceaux vasculaires rangés concentriquement sont produits par plusieurs méristèmes secondaires formés successivement, tandis qu'une disposition irrégulière des faisceaux provient de ce que ceux-ci pénètrent en dedans du méristème.

M. F. Pax, en 1904, maintient plus nettement encore l'erreur

de de Bary : il admet deux cas, celui de plusieurs anneaux de cambium secondaire successifs et celui d'un seul anneau de cambium restant toujours actif; ce dernier produirait vers l'intérieur des faisceaux vasculaires collatéraux.

Nous nous plaisons à reconnaître que M. Ed. Strasburger, dans son beau *Traité de Botanique* (**23**, p. 115), a supprimé les choses erronées que nous rappelons ici, mais nous regrettons son extrême concision. Il se borne à énoncer que plusieurs anneaux de cambium peuvent prendre naissance successivement et que chacun d'eux produit du bois vers l'intérieur et du liber vers l'extérieur.

Dans la dernière édition de son *Anatomie physiologique*, M. G. Haberland a rendu un compte très exact des découvertes de Morot et de Hérail (**10**, p. 601).

3. — *Lieu de formation des zones génératrices surnuméraires.*

Dans le relevé bibliographique qui précède, nous avons négligé de préciser les tissus dans lesquels s'établissent les zones génératrices successives. Ce point doit maintenant retenir notre attention.

C'est à M. L. Morot que l'on doit les premières notions exactes en cette matière. Il a constaté que la première zone génératrice surnuméraire s'établit soit dans le péricycle, soit dans un parenchyme secondaire qui en dérive. Les zones génératrices ultérieures, tantôt complètes, tantôt réduites à l'état de ponts ou de boucles extralibériennes, apparaissent toujours dans le parenchyme secondaire ou tertiaire formé à l'extérieur de la zone génératrice surnuméraire précédente.

Cette explication a été généralement admise. Seul, à notre connaissance, M. F. Gidon (**5**, pp. 31, 78, 82) l'a rejetée en soutenant que les recloisonnements qui aboutissent à la constitution de l'anneau générateur se produisent dans les cellules d'un pseudo-péricycle existant au dos des faisceaux. Ce pseudo-péricycle provient : 1° des éléments procambiaux qui peuvent persister en dehors des tubes libériens externes; 2° de ces tubes

libériens eux-mêmes, lorsqu'ils viennent à perdre leur différenciation spécifique.

Nous attachons, quant à nous, peu d'importance à la question de la détermination précise des éléments anatomiques qui, dans chaque cas particulier, sont le siège d'un recloisonnement générateur. Tout tissu vivant peut, dans certaines circonstances, manifester une telle activité. Nous pensons que les plantes appartenant à des familles notablement différentes ou à des espèces d'une même famille, mais vivant dans des conditions plus ou moins spécialisées, peuvent présenter à ce point de vue une certaine diversité.

Pour la même raison, nous croyons inutile la distinction qu'on voudrait établir entre les tissus secondaires, les tissus tertiaires, les tissus quaternaires, etc. Quel que soit le lieu de leur apparition, les arcs cambiaux fonctionnent toujours de la même manière et leurs produits peuvent, par opposition aux faisceaux dérivés du procambium, recevoir partout le nom de massifs libéro-ligneux secondaires. Quant aux portions de zone génératrice qui n'engendrent ni bois ni liber, mais du parenchyme, etc., nous les nommons cambiformes avec M. Eg. Bertrand. Les tissus produits par le cambiforme appartiennent au tissu fondamental secondaire, par opposition au tissu fondamental primaire.

Nous nous refusons aussi à admettre la nomenclature si peu justifiée, nous semble-t-il, que M. F. Gidon emploie dans son mémoire sur la tige et la feuille des Nyctaginées (**5**, pp. 31, 109, etc.). Pour lui, la zone de recloisonnement périphérique, qui donne naissance aux faisceaux dits surnuméraires, n'est pas une zone génératrice secondaire, mais du « procambium ». Par suite, les faisceaux périphériques surnuméraires ne sont pas des faisceaux secondaires, mais des « faisceaux primaires tardifs ».

Ce qui a pu, croyons-nous, être pour M. Gidon une cause d'erreur non soupçonnée, c'est le fait que chez certaines Dicotylées le stade procambial est réellement difficile à saisir, tant est précoce l'apparition de la zone génératrice secondaire normale et des zones génératrices surnuméraires. Bien loin d'admettre un grand développement du procambium chez les Nyctaginées

et les familles voisines, nous croyons que le procambium et le cambium des faisceaux y ont subi une forte réduction et qu'ils sont remplacés physiologiquement par des zones génératrices secondaires très actives apparaissant très tôt.

Au surplus, les massifs libéro-ligneux secondaires que M. Gidon considère comme faisceaux primaires tardifs, sont dépourvus de trachées et dès lors leur caractère secondaire peut être reconnu par un simple examen fait à l'état adulte.

Remarquons enfin que le fonctionnement de la prétendue couronne procambiale de M. Gidon, tel qu'il ressort du mémoire que nous analysons, est bien celui d'une zone génératrice secondaire qui conserve son activité dans les parties conjonctives, mais qui s'éteint dans les parties comprises entre bois et liber, pour réapparaître en dehors à l'aide d'un pont ou d'une boucle (1).

---

(1) Il me sera sans doute permis d'exprimer ici le profond étonnement que j'ai éprouvé en lisant le passage suivant, à la page 25 du mémoire de M. Gidon : « Tout récemment encore, M. Gravis, dans son travail sur les *Tradescantia*, émettait l'opinion que ces faisceaux périphériques étaient peut-être des formations d'une nature toute particulière, et réellement *propres à la tige*, sans relation avec les feuilles ».

Ce que je me suis efforcé de démontrer dans mon mémoire sur le *Tradescantia*, c'est précisément tout le contraire ! Le § 11 de mes conclusions (8, p. 251) ne peut laisser aucun doute à cet égard. Le voici textuellement : « Les faisceaux considérés comme propres à la tige par les auteurs allemands sont formés par l'union des extrémités inférieures des faisceaux foliaires externes : ce sont réellement des anastomotiques externes, comme le démontre le parcours dans la tige adulte et surtout dans le sommet végétatif étudié par des coupes transversales successives. »

Sans vouloir justifier à nouveau cette affirmation si catégorique, je rappellerai qu'on s'accorde généralement à faire des Commélinées l'un des types principaux de l'organisation des Monocotylées. Falkenberg et de Bary ont caractérisé ce type par l'existence de faisceaux périphériques propres à la tige et, par le fait qu'après avoir pénétré dans la région centrale, les faisceaux foliaires s'y anastomosent sans revenir vers l'extérieur. Je crois avoir montré par des preuves tirées du parcours des faisceaux et du développement des tissus que les faisceaux périphériques du *Tradescantia* ne

4. — *Comparaison avec les Monocotylées.*

L'aspect que présente la coupe transversale de la tige chez les Chénopodiées, Amarantacées, Nyctaginées, etc., a suggéré à quelques auteurs l'idée d'un rapprochement à faire entre l'organisation de ces plantes et celle des Monocotylées. La ressemblance, vaguement signalée d'ailleurs, se résume dans le grand nombre de faisceaux et la disposition éparpillée qui en est la conséquence. On conviendra que ce caractère est bien peu important : si les Dicotylées arborescentes ont généralement peu de faisceaux, il ne faut pas oublier que les Dicotylées herbacées en renferment souvent un nombre assez élevé (certaines Renonculacées, Ombellifères, Rosacées, Composées, etc.).

M. F. Gidon a voulu, semble-t-il, préciser les affinités supposées entre les Cyclospermées et les Monocotylées en cherchant à établir un rapprochement entre la formation des faisceaux périphériques des Nyctaginées et l'apparition tardive des faisceaux externes dans la tige de certaines Monocotylées capables de manifester un accroissement diamétral secondaire. « En réalité, dit-il, une tige de *Mirabilis* diffère peu, en somme, d'une tige de Monocotylée. » (**5**, p. 21.)

Nous ne pouvons partager cette opinion. La zone génératrice périphérique des *Dracœna*, etc., est un périméristème (1) produisant vers l'intérieur des îlots de procambium séparés par du tissu fondamental secondaire; ces îlots se différenciant en bois et

---

sont nullement « propres à la tige »; ce sont en réalité des « faisceaux anastomotiques externes », c'est-à-dire les sympodes formés par la réunion des parties inférieures des foliaires externes.

Au surplus, les faisceaux périphériques du *Tradescantia* n'ont rien de commun avec les massifs libéro-ligneux secondaires des Chénopodiées, Amarantacées et Nyctaginées. Cela me dispense d'en parler plus longuement ici. A. G.

(1) Au sujet du méristème, du périméristème et autres tissus générateurs, voir mémoire sur le *Tradescantia* (**8**, pp. 120 et surtout 124).

liber deviennent de véritables faisceaux. Au contraire, la zone génératrice périphérique des Nyctaginées, etc., est un cambiforme produisant du tissu fondamental secondaire et se transformant localement en arcs cambiaux : ceux-ci engendrent un peu de bois secondaire *en dedans* et un peu de liber secondaire *en dehors*. De là la production de massif libéro-ligneux secondaires nullement comparables aux faisceaux tardifs des *Dracæna*, mais comparables aux tissus conducteurs secondaires normaux des Dicotylées.

A d'autres points de vue (agencement des traces foliaires, fonctionnement du cambium intrafasciculaire, insertion des feuilles, etc.), bien des différences seraient à signaler entre les Cyclospermées et les Monocotylées.

Nous n'avons pas à nous y arrêter ici.

RÉSUMÉ

La structure de la tige de l'Amarante et vraisemblablement de beaucoup de genres appartenant aux familles des Amarantacées, Chénopodiées, etc., nous semble caractérisée par deux faits principaux : d'une part, la composition, la forme et l'agencement des traces foliaires et des traces gemmaires; d'autre part, le mécanisme de l'accroissement diamétral secondaire.

I. — COMPOSITION ET FORME D'UNE TRACE FOLIAIRE.

La trace foliaire la plus complète, correspondant à la feuille la plus ample, comprend 11 faisceaux et peut se formuler de la façon suivante :

m''m'm L *i* M *i* L *m m'm''*

(Figure 7, coupe dans le nœud [13] au niveau de l'insertion de la feuille : les 11 faisceaux qui passent de la feuille dans la tige sont pointillés.)

Dès qu'ils ont pénétré dans la tige, les faisceaux foliaires se disposent en zigzag de telle façon que les plus gros (L M L) sont les plus rapprochés du centre de la tige, tandis que les autres en sont d'autant plus éloignés qu'ils sont plus petits (fig. 8 : coupe au milieu de l'entre-nœud [13]).

Dans leur parcours descendant les foliaires s'unissent les uns après les autres aux faisceaux anastomotiques voisins : la trace foliaire se réduit ainsi graduellement de la manière suivante :

m'm L *i* M *i* L *m m'*
m L *i* M *i* L *m*
L *i* M *i* L
i M *i*
M

(Figures 9, 10, 11 : coupes dans les entre-nœuds [12], [10] et [9].)

L'angle phyllotaxique étant égal à $^2/_5$, cette réduction de la

trace foliaire est réalisée dans l'étendue de cinq segments : les faisceaux m'' ont un trajet très court; les faisceaux m', m, L, i et M ont un trajet de plus en plus long; le faisceau M seul dépasse un peu la longueur de 5 entre-nœuds. (Fig. 13 : parcours des faisceaux d'une trace foliaire vue de face ; fig. 14 : parcours de la moitié d'une trace foliaire vue de profil.)

Aux feuilles plus petites situées au-dessous et au-dessus de celle dont nous venons de nous occuper, correspondent des traces foliaires formées d'un nombre moins grand de faisceaux. La feuille 1, qui est la plus petite, ne donne à la tige que 3 faisceaux : L M L (fig. 30); les autres feuilles lui en donnent 5, 7, 9 ou 11. La longueur des foliaires dans la tige est notablement plus longue quand l'angle phyllotaxique égale $^3/_8$ que lorsqu'il mesure $^2/_5$.

Quel que soit le nombre des faisceaux dont elle est composée, la trace foliaire affecte toujours la forme en zigzag (fig. 30, 31, 32, 35, 36, 37).

Les bractées n'ont qu'un seul faisceau très longuement descendant dans l'axe de l'inflorescence (fig. 40, 41, 42).

II. — COMPOSITION ET FORME D'UNE TRACE GEMMAIRE.

La trace gemmaire la plus complète correspond au rameau inséré dans l'aisselle de la feuille la plus ample. Les faisceaux qui passent de ce rameau dans la tige mère et que nous appelons gemmaires, sont les uns internes, les autres externes (fig. 4 et 5 : les faisceaux gemmaires sont hachurés).

Les gemmaires internes, plus gros, pénètrent assez profondément dans la tige et forment deux groupes, un de chaque côté du foliaire médian; en descendant, ils se rapprochent des faisceaux anastomotiques voisins et se confondent avec eux après avoir parcouru la longueur d'un entre-nœud environ (G. *i.* dans les fig. 7 et 8).

Les gemmaires externes, plus petits, restent à la périphérie de la tige mère, se disposent en un arc de cercle qui, avec d'autres arcs semblables, constitue un cercle complet (G. *e.* dans les fig. 7

et 8). Ils ont un trajet libre de la longueur de cinq entre-nœuds; ils se terminent dans la moitié supérieure du nœud situé exactement au-dessous de celui où le rameau est inséré. Ils s'unissent là aux faisceaux anatosmotiques les plus externes (fig. 13 et 14 : les gemmaires sont représentés en traits interrompus).

Toutes les traces gemmaires ont la même constitution, dans l'axe de l'inflorescence (fig. 40 et 41) aussi bien que dans la portion végétative de la tige, mais le nombre et la longueur des faisceaux gemmaires sont variables. Le nombre est en rapport avec le diamètre du rameau : il est maximum dans l'aisselle de la feuille la plus ample, minimum dans l'aisselle des bractées de la partie spiciforme de l'inflorescence. La longueur des gemmaires internes est toujours assez courte, sauf dans la partie spiciforme de l'inflorescence; celle des gemmaires externes dépend de l'angle phyllotaxique, puisque ces faisceaux se terminent au nœud situé exactement en dessous du nœud d'entrée : soit 5 entre-nœuds dans le cas d'un angle égal à $^2/_5$, 8 entre-nœuds lorsque l'angle égale $^3/_8$.

III. — AGENCEMENT DES TRACES FOLIAIRES ET DES TRACES GEMMAIRES.

Les faisceaux foliaires perdent leur individualité en s'unissant à un faisceau voisin : les sympodes ainsi constitués sont les faisceaux anastomotiques. Certains d'entre ces derniers reçoivent aussi les faisceaux gemmaires internes, d'autres les gemmaires externes. Les anastomotiques sont d'autant plus nombreux que les foliaires et les gemmaires sont en plus grand nombre à un niveau donné. (Dans tous nos dessins d'ensemble [fig. 30, 31, 32, 35, 36, 37, 40, 41, etc.] les anastomotiques ont été laissés en blanc; dans les parcours [fig. 13, 14, 42] ils ont été figurés par des traits plus forts.)

Les traces foliaires sont juxtaposées et complètement indépendantes les unes des autres; elles sont séparées par des faisceaux anastomotiques plus ou moins nombreux, disposés en groupes rayonnants. Le nombre des traces foliaires visibles sur

une coupe transversale dépend de la phyllotaxie : il y en a 4 quand les feuilles sont écartées de $^1/_2$ circonférence environ (fig. 30); 5 quand elles sont écartées de $^2/_5$ (fig. 35); 8 quand leur écartement égale $^3/_8$ (fig. 37). Dans la région végétative, chaque section transversale montre ordinairement une ou deux traces foliaires complètes, une ou deux presque complètes, les autres réduites aux faisceaux *i* M *i*.

Contrairement aux traces foliaires qui sont manifestes dans toutes les coupes transversales, les traces gemmaires ne se reconnaissent bien qu'un peu en dessous de chaque nœud. Il faut cependant noter que les gemmaires externes sont reconnaissables à tous les niveaux puisqu'ils constituent un cercle qui occupe la périphérie du cylindre central dans toute l'étendue de la portion végétative de la tige et dans toute l'étendue de l'axe de l'inflorescence. (Ce cercle de faisceaux hachurés est visible dans toutes nos figures.) Les massifs teintés en noir que l'on voit souvent en dehors de ce cercle sont les productions secondaires dont nous allons maintenant nous occuper.

IV. — MÉCANISME DE L'ACCROISSEMENT DIAMÉTRAL SECONDAIRE.

Dans la tige des Amarantes, les faisceaux (foliaires, gemmaires et anastomotiques) sont assez nombreux et bien distincts; ils sont éparpillés et d'autant plus rapprochés du centre qu'ils sont plus gros. Ils s'accroissent peu, leur cambium étant peu actif. Par contre, une zone génératrice cambiforme circulaire et continue s'établit par le recloisonnement tangentiel des cellules de l'assise sous-phlœotermique (fig. 43, 44, 45). Ce cambiforme produit du tissu fondamental secondaire et se transforme çà et là en petits arcs de cambium (fig. 47). Ceux-ci engendrent du bois secondaire vers l'intérieur et du liber secondaire vers l'extérieur (fig. 48). Il en résulte un cercle de massifs libéro-ligneux secondaires séparés les uns des autres par le tissu fondamental secondaire. (Dans tous nos dessins d'ensemble, les massifs libéro-

ligneux secondaires sont indiqués en noir : pl. I, II, III, VII, VIII, XIII et XIV.)

Lorsque le cambium de ces massifs cesse de fonctionner, des cloisonnements tangentiels cambiformes se manifestent en arrière des massifs libéro-ligneux secondaires (fig. 49). La zone génératrice contournant ainsi les premiers massifs formés saute en arrière et continue à produire du tissu fondamental secondaire en s'éloignant du centre de la tige. De nouveaux arcs cambiaux se montrent bientôt au sein du cambiforme. Ainsi se produisent plusieurs cercles plus au moins concentriques de massifs libéro-ligneux secondaires environnés de tissu fondamental secondaire (fig. 50, 51, 52 : entre-nœud [1] de la tige; fig. 53 à 58 : racine).

Cette structure secondaire s'observe dans la partie épaisse de la racine, dans l'hypocotyle, dans toute la région végétative de la tige et des rameaux; elle fait complètement défaut dans l'inflorescence (fig. 40 et 41).

L'accroissement du diamètre de la tige résulte en partie aussi de l'accroissement des cellules du parenchyme interfasciculaire et de leur recloisonnement dans diverses directions (fig. 50, 51, 52, qui montrent que l'intervalle entre les faisceaux augmente avec l'âge).

Au point de vue fonctionnel, les tissus secondaires de l'Amarante sont comparables à ceux des arbres dicotylés, mais ils en diffèrent morphologiquement, c'est-à-dire par leur genèse et leur conformation à l'état adulte. Dans les arbres, en effet, les faisceaux (foliaires, gemmaires et anastomotiques) sont peu nombreux et disposés côte à côte; à travers ces faisceaux, il se forme de bonne heure une zone circulaire et continue de cambium qui engendre indéfiniment du bois secondaire en dedans et du liber secondaire en dehors. A l'état adulte, les faisceaux sont difficilement reconnaissables dans le tronc et les branches des arbres, tandis que la couronne de tissus conducteurs secondaires est devenue très épaisse.

D'autre part, l'accroissement diamétral secondaire des Amarantes diffère complètement de celui de certaines Monocotylées

(*Dracœna*, *Yucca*, etc.) chez lesquelles un périméristème engendre vers l'intérieur du tissu fondamental et des massifs de procambium qui subissent ultérieurement la différenciation libéro-ligneuse (1).

A ce propos, il convient de faire remarquer que des tissus totalement différents sont souvent confondus sous des noms trop généraux. Beaucoup d'auteurs se servent du terme « cambium » pour désigner tout tissu générateur secondaire, du terme « faisceau » pour nommer tout massif de bois et de liber, voire même de bois ou de liber.

Nous avons cru devoir, comme dans nos travaux antérieurs, réserver le nom de *cambium* au tissu générateur secondaire produisant du bois secondaire vers l'intérieur et du liber secondaire vers l'extérieur; nous avons appelé *cambiforme* un tissu générateur secondaire produisant d'autres tissus (parenchyme, sclérenchyme, etc.) internes et externes dont l'ensemble forme le tissu fondamental secondaire.

Par *faisceau* nous entendons uniquement un groupe d'éléments ligneux et libériens provenant de la différenciation d'un îlot de procambium, éléments auxquels s'ajoutent, chez les Dicotylées, les produits d'un cambium intrafasciculaire. L'îlot procambial peut dériver directement du méristème terminal, mais il peut aussi provenir d'un périméristème (*Dracœna*, *Yucca*, etc.) (2).

Par *massif libéro-ligneux secondaire*, nous entendons un groupe d'éléments conducteurs engendrés par un arc cambial sans état procambial préalable. Tels sont les massifs existant à la périphérie de la tige de l'Amarante en dehors des faisceaux gemmaires externes. Ces massifs ne peuvent être confondus ni

---

(1) Voir mémoire sur le *Tradescantia* (8, pp. 120 et suiv., notamment p. 124).

(2) Nous réservons le nom de *méristème* au tissu générateur qui engendre des faisceaux primaires et du tissu fondamental primaire; le *périméristème* est un tissu générateur qui engendre des faisceaux secondaires et du tissu fondamental secondaire.

avec les faisceaux normaux (foliaires, gemmaires et anastomotiques), ni avec les faisceaux tardifs des *Dracœna*.

V. — TIGE VÉGÉTATIVE ET AXE D'INFLORESCENCE.

Terminons ce résumé en considérant deux coupes caractéristiques.

La coupe pratiquée au milieu de l'entre-nœud [9] (fig. 11) représente l'état moyen de l'organisation de la tige de l'Amarante dans sa région végétative. Nous y remarquons 5 traces foliaires comprenant ensemble 29 faisceaux (pointillés) ; 5 groupes anastomotiques composés de 26 faisceaux en tout (blancs); un cercle de 65 faisceaux gemmaires (hachurés), et enfin une couronne de 160 massifs libéro-ligneux secondaires (en noir).

La coupe pratiquée au milieu de l'entre-nœud [81] (fig. 41) nous fera comprendre l'organisation de la tige de l'Amarante dans sa région florifère. Cette coupe contient 8 traces foliaires, réduites chacune à un seul faisceau (pointillé); 8 faisceaux anastomotiques (blancs); 16 gemmaires internes et 32 gemmaires externes (hachurés). Il n'y a pas de massifs libéro-ligneux secondaires (1).

L'axe de l'inflorescence diffère donc très notablement de l'axe végétatif tant au point de vue du parcours qu'à celui de l'histologie proprement dite. Toutefois, la base de l'inflorescence réalise une structure de transition entre l'organisation de la région végétative et celle de la région purement florifère (fig. 40 : coupe au milieu de l'entre-nœud [25]).

---

(1) Nous négligeons ici trois foliaires et deux gemmaires internes qui sont sur le point de disparaître en se réunissant à des anastomotiques.

CONCLUSIONS

Comparant les résultats de notre travail à ceux de nos devanciers, nous sommes amené à reconnaître les points suivants :

1. — Le parcours des faisceaux dans la tige de l'Amarante semble avoir été complètement méconnu jusqu'ici. Il constitue cependant un type très spécial caractérisé par la forme repliée en zigzag de la trace foliaire, ainsi que par l'agencement des traces foliaires juxtaposées côte à côte et séparées les unes des autres par des groupes de faisceaux anastomotiques.

Les traces foliaires visibles dans une coupe transversale sont normalement au nombre de 5 ou de 8, suivant que l'angle phyllotaxique est égal à $^2/_5$ ou à $^3/_8$. On constatera surtout que les faisceaux d'une trace foliaire ne se placent jamais entre les faisceaux d'une autre trace foliaire, et qu'ils ne s'interposent même pas aux anastomotiques, de telle façon que la tige est constituée par 5 ou 8 secteurs bien distincts.

Les traces gemmaires sont remarquables par la distinction qu'il y a lieu d'établir entre les gemmaires internes, qui ne sont ordinairement visibles que sous les nœuds, et les gemmaires externes, qui forment un cercle de faisceaux périphériques reconnaissables à tous les niveaux.

Le parcours des faisceaux a été bien défini dans un trop petit nombre de plantes pour qu'on puisse, dès maintenant, faire des comparaisons entre l'Amarante et d'autres types.

Nous sommes frappé, quant à nous, des grandes différences que manifestent les traces foliaires et les traces gemmaires du Tradescantia, du Chlorophytum, de l'Amarantus, de l'Urtica, du Thalictrum et de plusieurs autres Renonculacées que nous connaissons bien.

2. — L'accroissement diamétral secondaire dans les Amarantacées et surtout dans les familles voisines a fait l'objet de nombreux travaux. Le mécanisme de cet accroissement a été bien élucidé par M. L. Morot, puis par M. J. Hérail. Il est regrettable que leurs découvertes soient méconnues par les auteurs de quelques ouvrages généraux récents.

Nos recherches, en confirmant celles de MM. Morot et Hérail, nous ont fourni l'occasion de publier des figures suffisamment complètes et détaillées, prises à différents stades de l'accroissement secondaire; ces figures, nous semble-t-il, faisaient défaut jusqu'ici.

Nous avons cherché à attirer de nouveau l'attention des anatomistes sur le mode si curieux du développement secondaire de certains Cyclospermées, développement qui diffère notablement de celui des autres Dicotylées et qui diffère surtout complètement de celui des Monocotylées.

3. — Ce dernier point, controversé encore par des botanistes contemporains, nous a amené à examiner certaines questions d'anatomie générale rendues obscures par une terminologie défectueuse. Nous serions heureux si nos efforts pouvaient déterminer enfin l'adoption d'une nomenclature histologique simple et précise, capable de mettre en évidence des caractères anatomiques aujourd'hui bien constatés, mais souvent dissimulés sous des termes mal appropriés.

BIBLIOGRAPHIE

1. **de Bary, A.**, Vergleichende Anatomie der vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne. (*Handbuch der physiologischen Botanik*, de W. Hofmeister, Bd IV. Leipzig, 1877.)

2. **Bertrand, C. Eg.**, Théorie du faisceau. (*Bull. scientif. du département du Nord*, 2e série, 3e année, nos 2, 3 et 4, 1880).

3. **Bonnier, G.**, et **Leclerc du Sablon**, Cours de botanique. Paris, 1901.

4. **Fron, G.**, Recherches anatomiques sur la racine et la tige des Chénopodiacées. (*Ann. sc. natur., botanique*, 8e série, t. IX. Paris, 1899.)

5. **Gidon, F.**, Essai sur l'organisation générale et le développement de l'appareil conducteur dans la tige et dans la feuille des Nyctaginées. (*Mém. Soc. linnéenne de Normandie*, t. XX. Caen, 1890.)

6. **Gravis, A.**, Recherches anatomiques sur les organes végétatifs de l'Urtica dioïca. (*Mém. in-4° de l'Académie royale des sciences, etc., de Belgique*, t. XLVII, 1884.)

7. **Gravis, A.**, Fixation au porte-objet des coupes faites dans la celloïdine. (*Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége*, vol. I, 1897.)

8. **Gravis, A.**, Recherches anatomiques et physiologiques sur le Tradescantia virginica. (*Mém. in-4° de l'Académie royale des sciences, etc., de Belgique*, t. LVII, 1898.)

9. **Gravis, A.**, et **Doncecl, P.**, Anatomie comparée du Chlorophytum elatum et du Tradescantia virginica. (*Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége*, vol. II, 1900.)

10. **Haberlandt, G.**, Physiologische Pflanzenanatomie. Leipzig, 1904.

11. **Hérail, J.**, Recherches sur l'anatomie comparée de la tige des Dicotylédones. (*Ann. sc. natur., botanique*, 7e série, t. II, 1885.)

12. **Lignier, O.**, De l'importance du système libéro-ligneux foliaire en anatomie végétale. (*Comptes rendus Acad. de Paris,* 6 août 1888)

13. **Lignier, O.**, De la forme du système libéro-ligneux foliaire chez les Phanérogames. (*Bull. Soc. linnéenne de Normandie,* 4e série, vol. II, 1889.)

14. **Lignier, O.**, De l'influence que la symétrie de la tige exerce sur la distribution, le parcours et les contacts de ses faisceaux libéro-ligneux. (*Bull. Soc. linnéenne de Normandie,* 4e série, vol II, 1889.)

15. **Mauslon, A.**, Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Le genre Thalictrum. (*Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége,* vol. I, 1897)

16. **Morot, L.**, Recherches sur le péricycle. (*Ann. sc. natur., botanique,* 6e série, t. XX. Paris, 1885.)

17. **Nägeli, C.**, Das Wachsthum des Stammes und der Wurzel bei den Gefässpflanzen und die Anordnung der Gefässstrange im Stengel. (*Beiträge zur wissenschaftlichen Botanik,* erstes Heft. Leipzig, 1858.)

18. **Pax, F.**, Prantl's Lehrbuch der Botanik. Leipzig, 1904.

19. **Petit, L.**, Le pétiole des Dicotylédones au point de vue de l'anatomie comparée et de la taxinomie. (Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris. Bordeaux, 1887.)

20. **Schinz, H.**, Amarantaceae. (Engler, A., und Prantl, K., *Die natürlichen Pflanzenfamilien,* Lief. 79. Leipzig, 1893.)

21. **Solereder, H.**, Systematische Anatomie der Dicotyledonen. Stuttgart, 1899.

22. **Strasburger, Ed.**, Ueber den Bau und die Verrichtungen der Leitungsbahnen in den Pflanzen. Iena, 1891.

23. **Strasburger, Ed.**, Lehrbuch der Botanik für Hochschulen. Iena, 1894.

24. **Van Tieghem, Ph.**, Traité de botanique, 2e édit. Paris, 1891.

PLANCHES

Dans toutes les figures, les faisceaux foliaires sont pointillés, les faisceaux gemmaires hachurés, les faisceaux anastomotiques sont laissés en blanc, les massifs libéro-ligneux secondaires sont noirs.

ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES DANS LES FIGURES.

Tissus :		*Faisceaux :*	
Ep.	Épiderme.	Fol.	Foliaire.
Phlt.	Phlœoterme.	M.	Médian.
B^1.	Bois primaire.	i.	Intermédiaire.
B^2.	Bois secondaire.	L.	Latéral.
L^1.	Liber primaire.	m.	Marginal.
L^2.	Liber secondaire.	G. e.	Gemmaire externe.
Cb.	Cambium.	G. i.	Gemmaire interne.
Cbf.	Cambiforme.	A.	Anastomotique.
$(LB)^2$.	Massif libéro-ligneux secondaire.		
Tf^2.	Tissu fondamental secondaire.		

N. B. — Le symbole d'un faisceau foliaire inscrit entre parenthèses indique que ce faisceau vient de se jeter sur le faisceau anastomotique désigné par la flèche. (Exemple : fig. 9 à comparer à la fig. 8, planche II.)

EXPLICATION DE LA PLANCHE I.

Fig. 1. — Portion de tige principale comprenant les segments 8 à 13 (p. 5).

Fig. 2. — Coupe à la base du pétiole de la feuille ^{13}.

Fig. 3. — Coupe de la tige un peu au-dessus du nœud ^{13}.

Fig. 4. — Coupe dans la partie supérieure du nœud ^{13}.

Fig. 5. — Coupe dans le nœud ^{13} au niveau de l'entrée des faisceaux m'', m', m', m''.

(La description de ces coupes a été faite pp. 7 et 11.)

A. GRAVIS ad. nat. del.

Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

Parcours des faisceaux (type).

A. GRAVIS ad. nat. del.

Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

Parcours des faisceaux (type).

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

Fig. 6. — Tige principale comprenant une partie végétative dressée, et une inflorescence pendante. Les 24 premiers nœuds portent chacun une feuille et un bourgeon plus ou moins développés (ils ont été figurés aux segments 1, 4, 9, 14, 19 et 24); à partir du nœud ^{25}, chaque segment porte une bractée et un rameau florifère; à partir du nœud ^{43}, chaque segment ne porte qu'une bractée et une petite cyme qui n'ont pas été figurées (p. 14).

Fig. 7. — Coupe dans le nœud ^{13} au niveau de l'entrée des faisceaux *m*, L, *i*, M, *i*, L, *m*.

Fig. 8. — Coupe au milieu de l'entre-nœud ^{15}.

Fig. 9. — Coupe au milieu de l'entre-nœud ^{12}.

(La description de ces coupes a été faite pp. 8 et 12.)

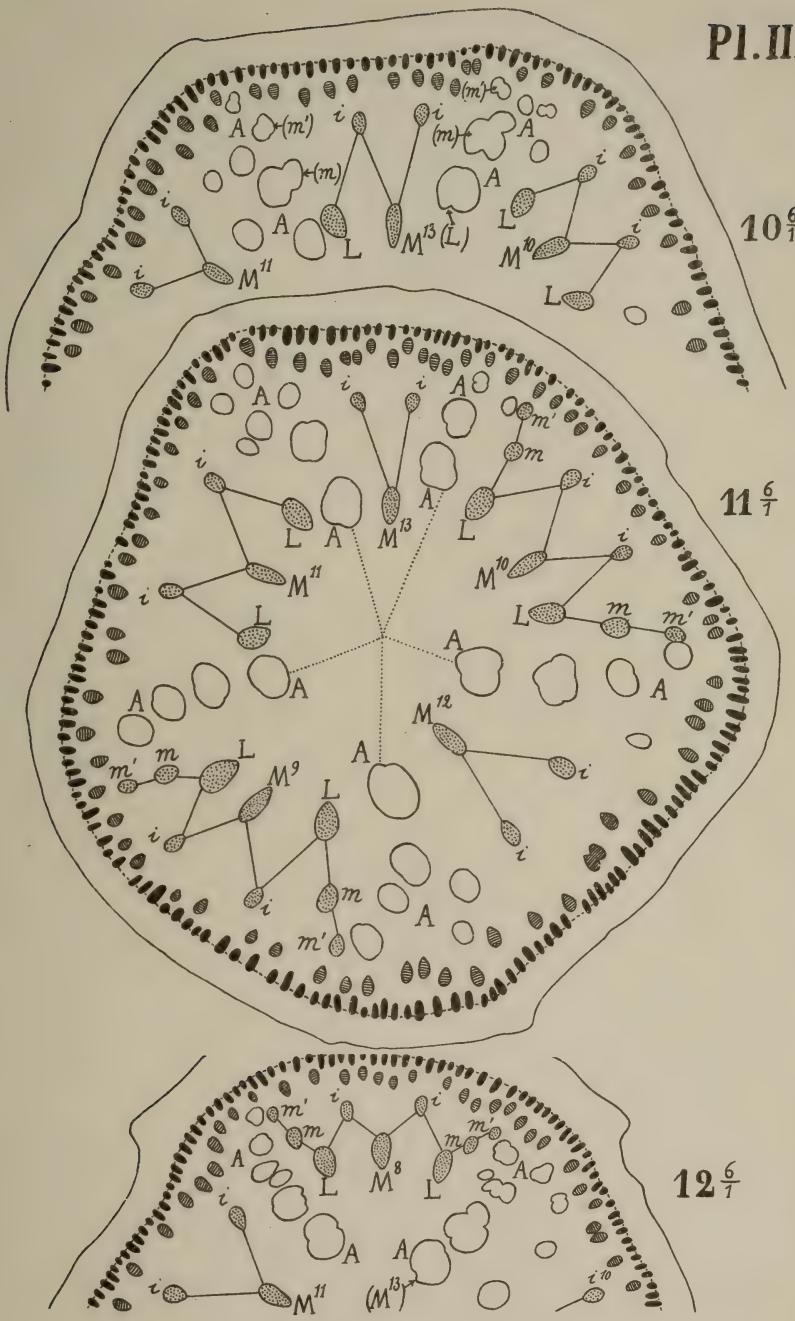
EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

Fig. 10. — Coupe au milieu de l'entre-nœud [10].

Fig. 11. — Coupe au milieu de l'entre-nœud [9].

Fig. 12. — Coupe au milieu de l'entre-nœud [8].

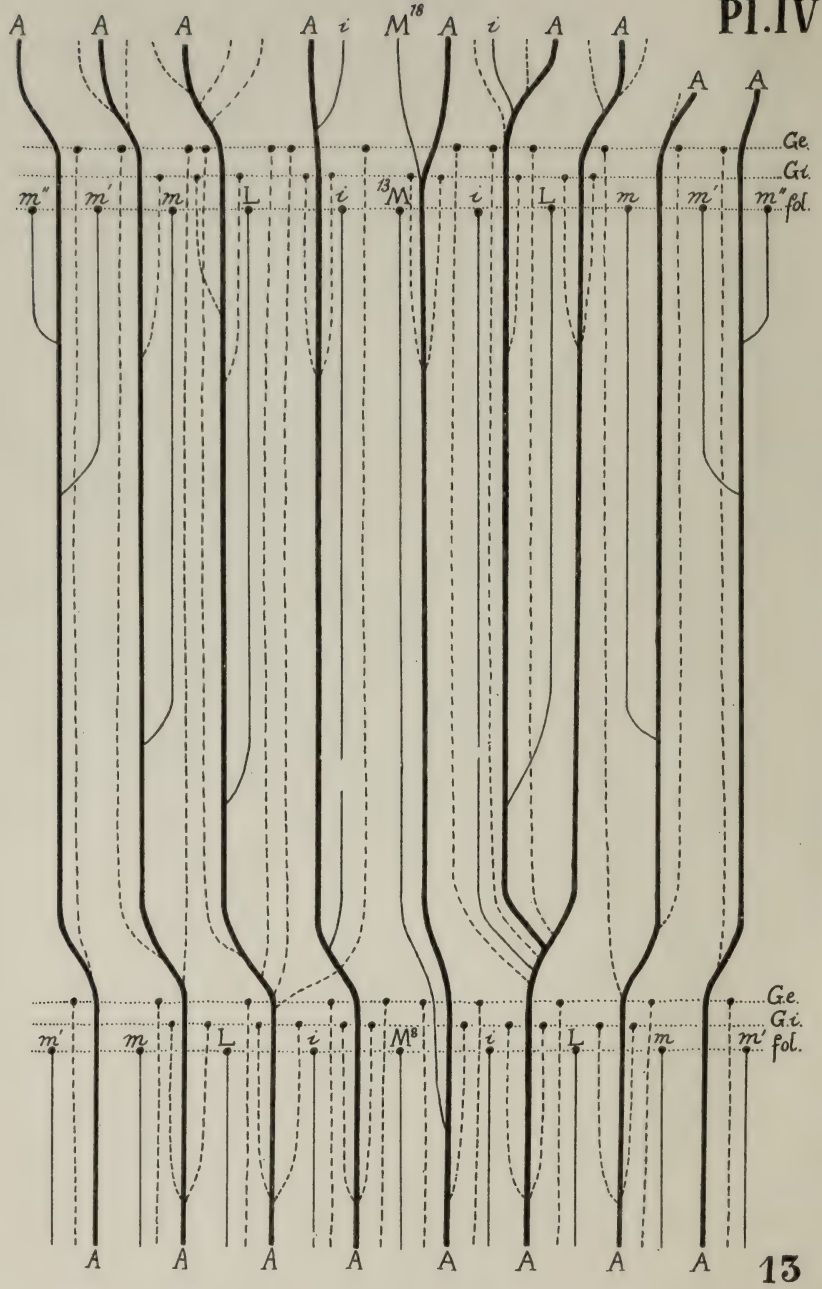
(La description de ces coupes a été faite pp. 8 à 11.)



A. GRAVIS ad. nat. del. *Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.*

AMARANTUS.

Parcours des faisceaux (type).



A. GRAVIS ad. nat. del. *Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.*

AMARANTUS.

Parcours des faisceaux (type).

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

Fig. 13. — Parcours des faisceaux de la trace foliaire et de la trace gemmaire du segment ^{13}, ainsi que des faisceaux anastomotiques voisins. Ce dessin comprend six segments superposés (segments 8 à 13), mais ne correspond qu'à l'un des cinq secteurs qui composent la tige.

(Le parcours est vu de face; il est décrit pp. 8 et 12.)

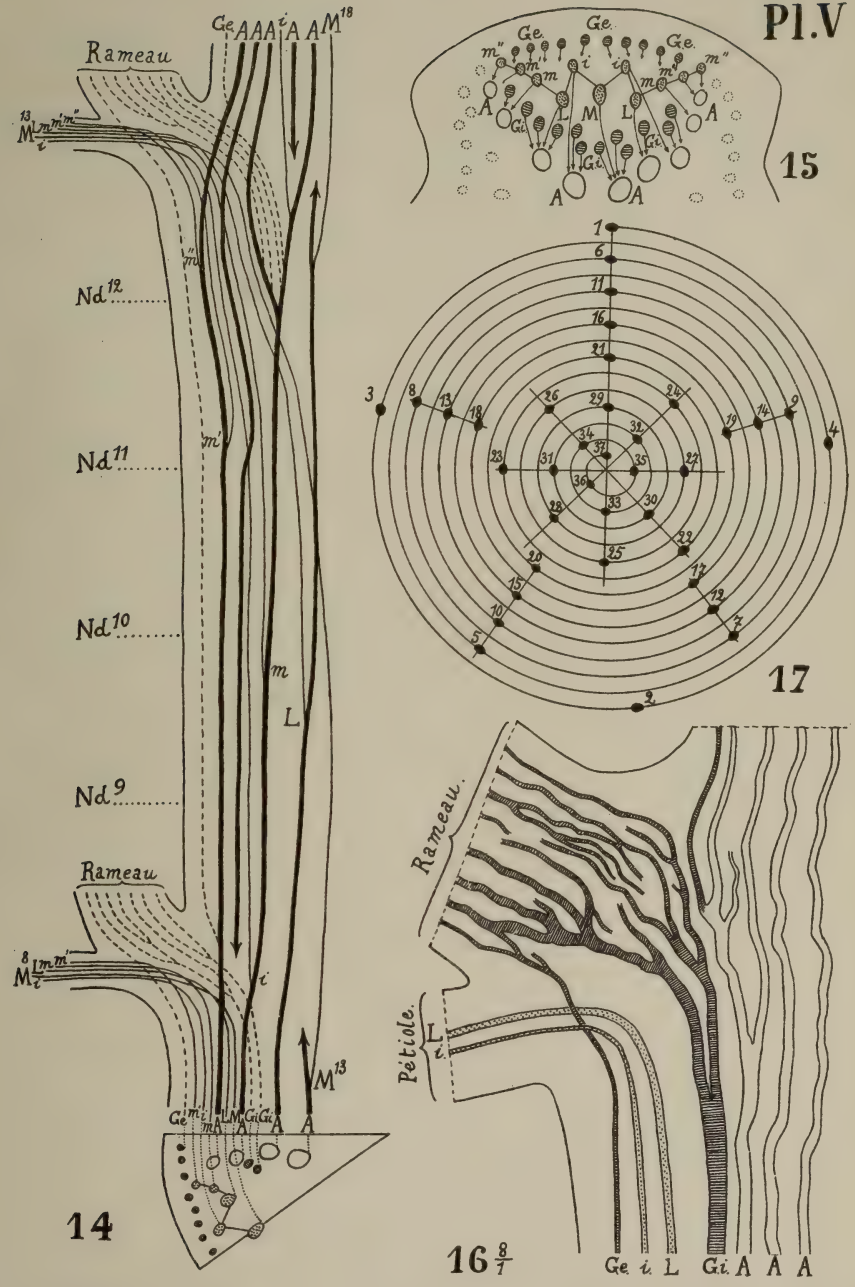
EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

Fig. 14. — Parcours des faisceaux composant la moitié droite de la trace foliaire et de la trace gemmaire du segment [15].
(Le parcours est vu de profil, pp. 9 et 12.)

Fig. 15. — Schéma d'une trace foliaire et d'une trace gemmaire avec les faisceaux anastomotiques voisins. Les flèches indiquent comment les faisceaux foliaires et les faisceaux gemmaires s'unissent aux faisceaux anastomotiques (pp. 9 et 13).

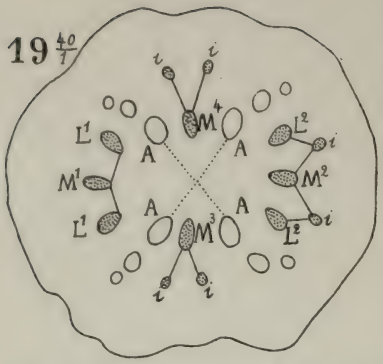
Fig. 16. — Dessin fourni par la superposition de trois coupes radiales successives dans le nœud [14] (p. 13).

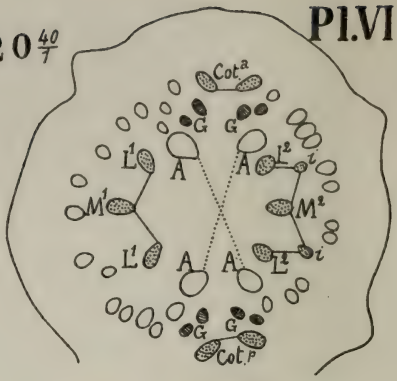
Fig. 17. — Spire phyllotaxique d'une tige principale (p. 14).

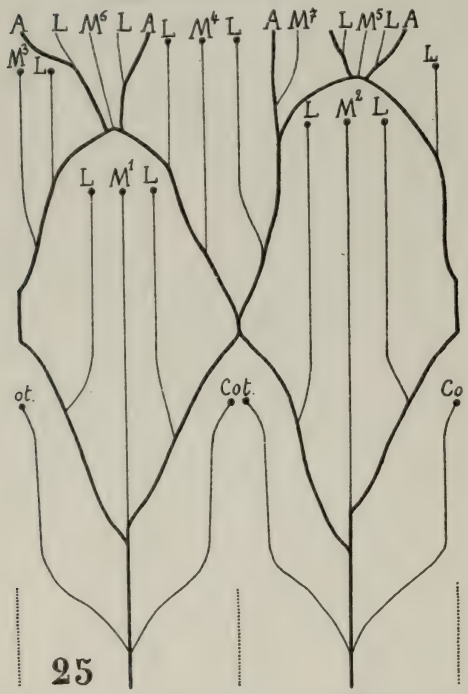


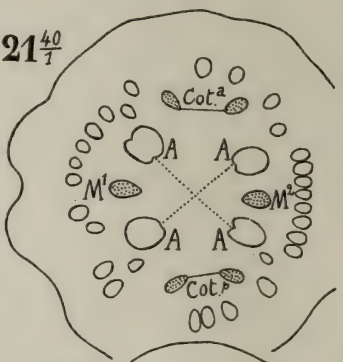
AMARANTUS.

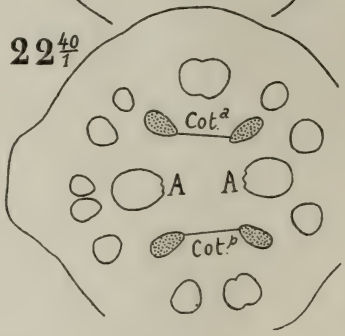
Parcours des faisceaux (type).

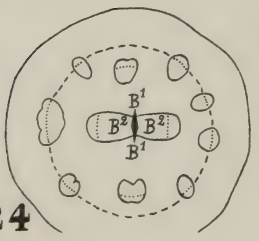


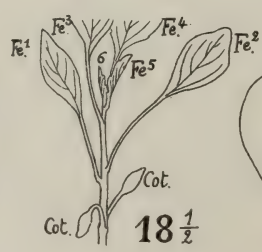


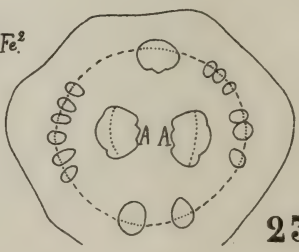












A. CONSTANTINESCO ad. nat. del.

Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

Parcours des faisceaux dans une plantule.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VI.

Fig. 18. — Plantule qui a fourni les coupes figurées dans cette planche.

Fig. 19. — Coupe au milieu de l'entre-nœud 1.

Fig. 20. — Coupe au niveau de l'insertion des cotylédons.

Fig. 21. — Coupe dans la partie supérieure de l'hypocotyle.

Fig. 22. — Coupe au milieu de l'hypocotyle.

Fig. 23. — Coupe dans la partie inférieure de l'hypocotyle.

Fig. 24. — Coupe dans la racine principale.

(Ces coupes sont décrites pp. 15 et 16.)

Fig. 25. — Parcours des faisceaux principaux dans l'hypocotyle et la tige principale de la plantule (p. 16).

EXPLICATION DE LA PLANCHE VII.

Fig. 26. — Coupe à la base du pétiole de l'un des cotylédons (p. 17).

Fig. 27. — Id. de la feuille [1] (p. 17).

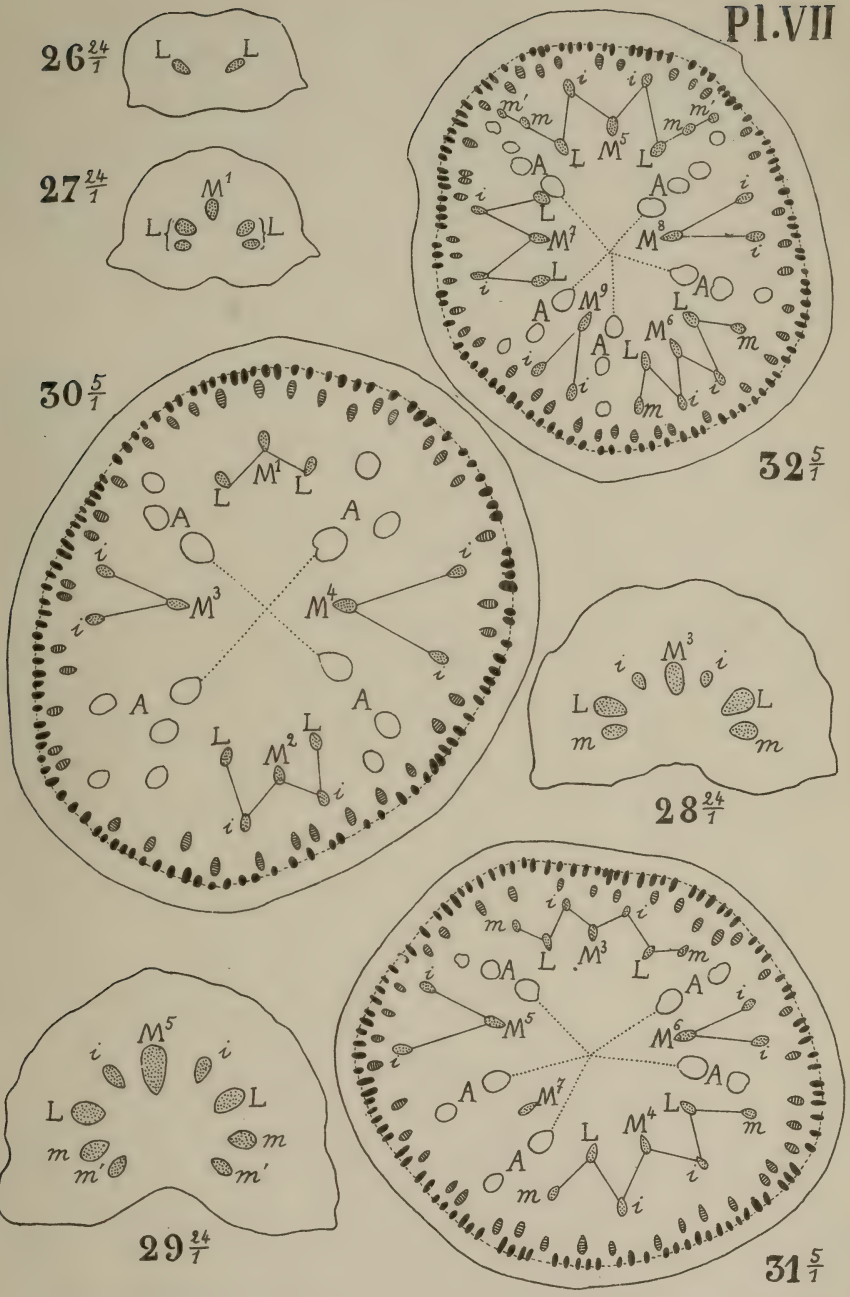
Fig. 28. — Id. de la feuille [3] (p. 17).

Fig. 29. — Id. de la feuille [5] (p. 17).

Fig. 30. — Coupe de la tige au milieu de l'entre-nœud [1] (p. 18).

Fig. 31. — Id. id. de l'entre-nœud [3] (p. 18).

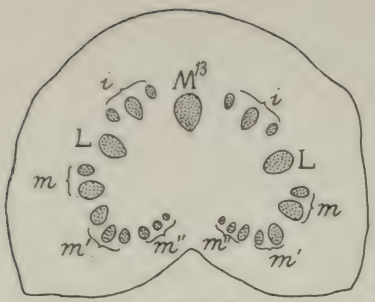
Fig. 32. — Id. id. de l'entre-nœud [5] (p. 18).



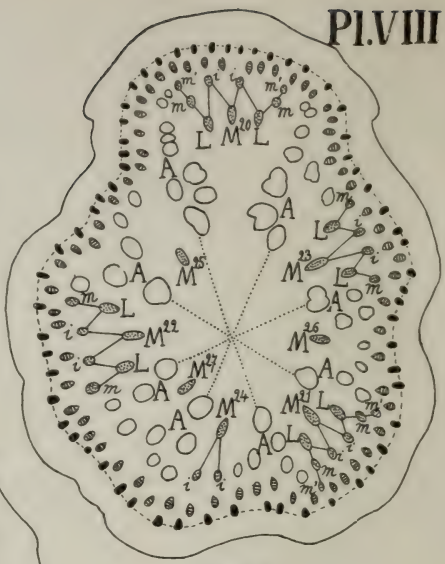
A. CONSTANTINESCO ad. nat. del. *Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.*

AMARANTUS.

Parcours des faisceaux dans la tige adulte.

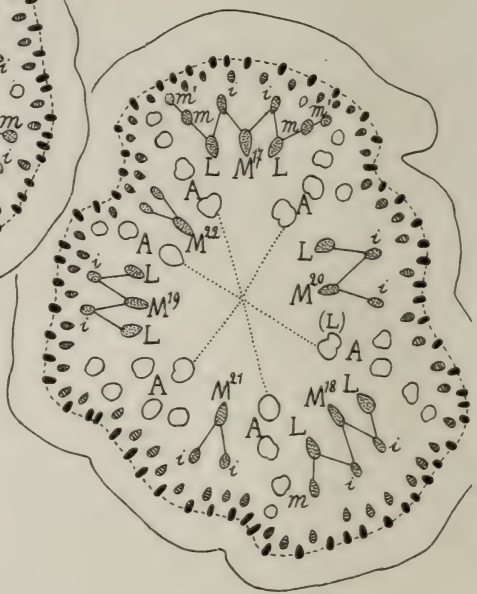


33 12/1

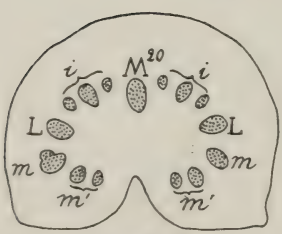


37 5/1

35 5/1



36 5/1



34 11/1

A. CONSTANTINESCO ad. nat. del.

Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

Parcours des faisceaux dans la tige adulte.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VIII.

Fig. 33. — Coupe à la base du pétiole de la feuille [13] (p. 17).

Fig. 34. — Id. id. de la feuille [20] (p. 17).

Fig. 35. — Coupe de la tige au milieu de l'entre-nœud [15] (p. 19).

Fig. 36. — Id. id. de l'entre-nœud [17] (p. 19).

Fig. 37. — Id. id. de l'entre-nœud [20] (p. 19).

EXPLICATION DE LA PLANCHE IX.

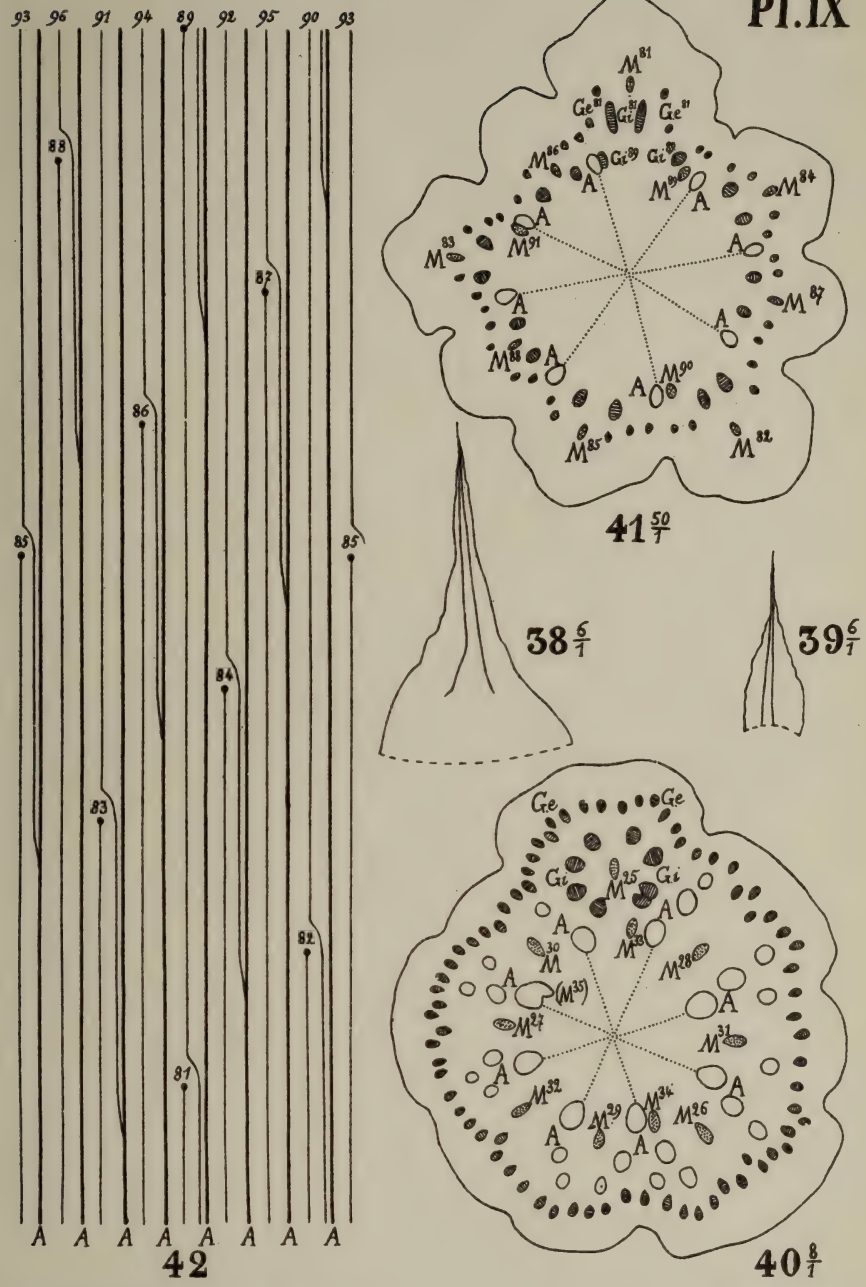
Fig. 38. — Première bractée de l'inflorescence (au nœud ^{25}) (p. 14).

Fig. 39. — Bractée de la partie spiciforme de l'inflorescence (p. 14).

Fig. 40. — Coupe de la tige au milieu de l'entre-nœud ^{25} (pp. 21 et 22).

Fig. 41. — Id. id. de l'entre-nœud ^{81} (pp. 21 et 22).

Fig. 42. — Parcours des faisceaux foliaires et des faisceaux anastomotiques dans les segments 81 à 89 (pp. 21 et 22).

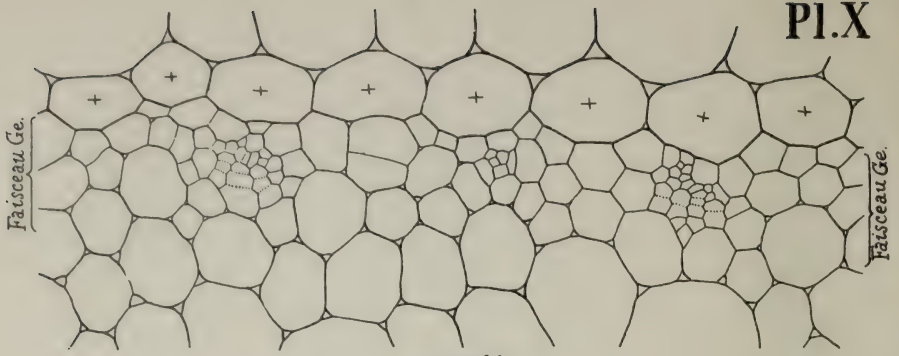


A. CONSTANTINESCO ad. nat. del.

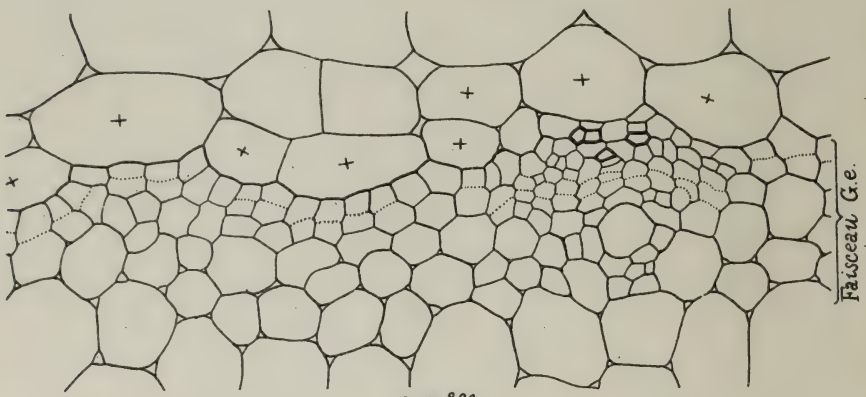
Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

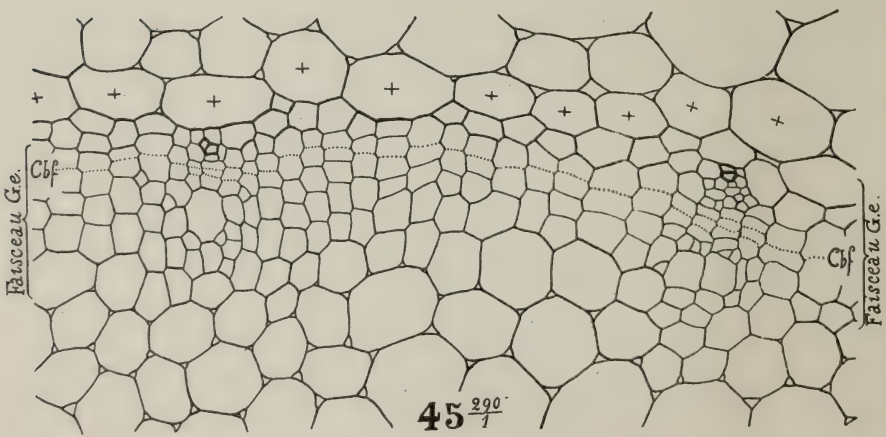
Parcours des faisceaux dans la tige adulte.



43 $\frac{290}{1}$



44 $\frac{290}{1}$



45 $\frac{290}{1}$

A. GRAVIS ad. nat. del. *Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.*

AMARANTUS.

Accroissement secondaire de la tige.

EXPLICATION DE LA PLANCHE X.

Les figures 43 à 49 représentent des portions de coupes transversales pratiquées au milieu de l'entre-nœud 1 de tiges principales de plus en plus âgées.

Fig. 43. — Différenciation des faisceaux gemmaires externes (p. 25).

Fig. 44. — Premier recloisonnement tangentiel des cellules sous-phlœotermiques (p. 25).

Fig. 45. — Recloisonnements répétés dans les mêmes cellules (p. 25).

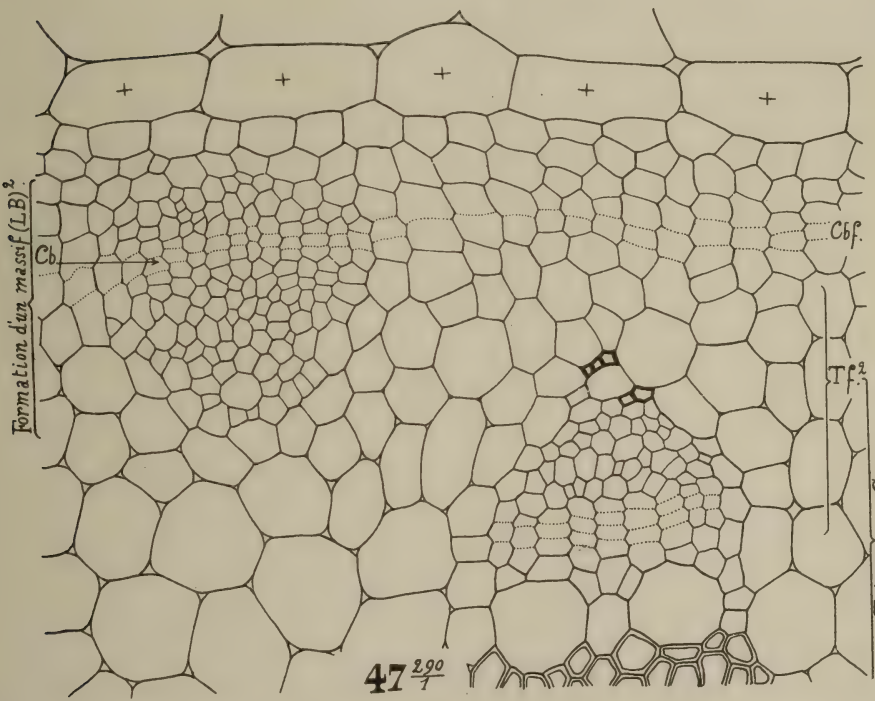
EXPLICATION DE LA PLANCHE XI.

Suite de la série précédente (voir explication de la planche X).

Fig. 46. — Recloisonnements tangentiels des cellules situées entre le liber des faisceaux gemmaires externes et le phlœoterme (p. 25).

Fig. 47. — Apparition d'un arc cambial dans la zone cambiforme (p. 26).

46 $\frac{290}{1}$



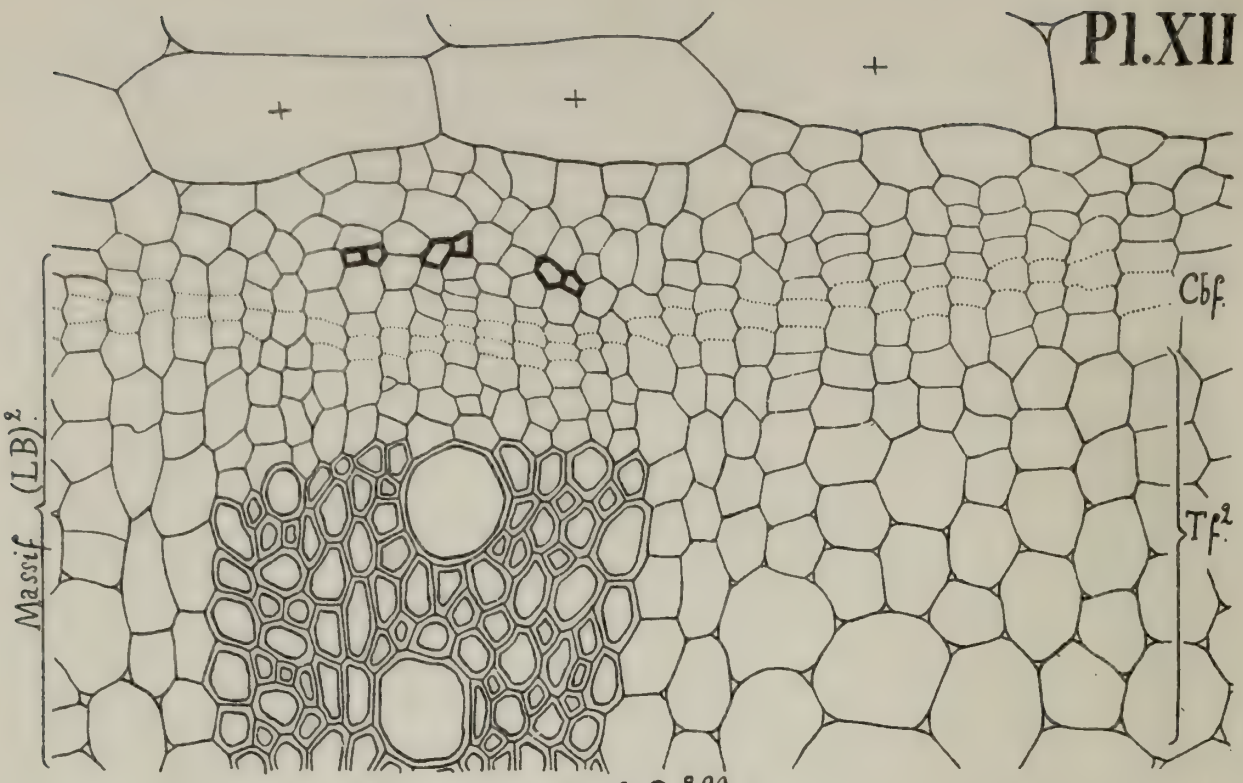
47 $\frac{290}{1}$

A. GRAVIS ad. nat. del.

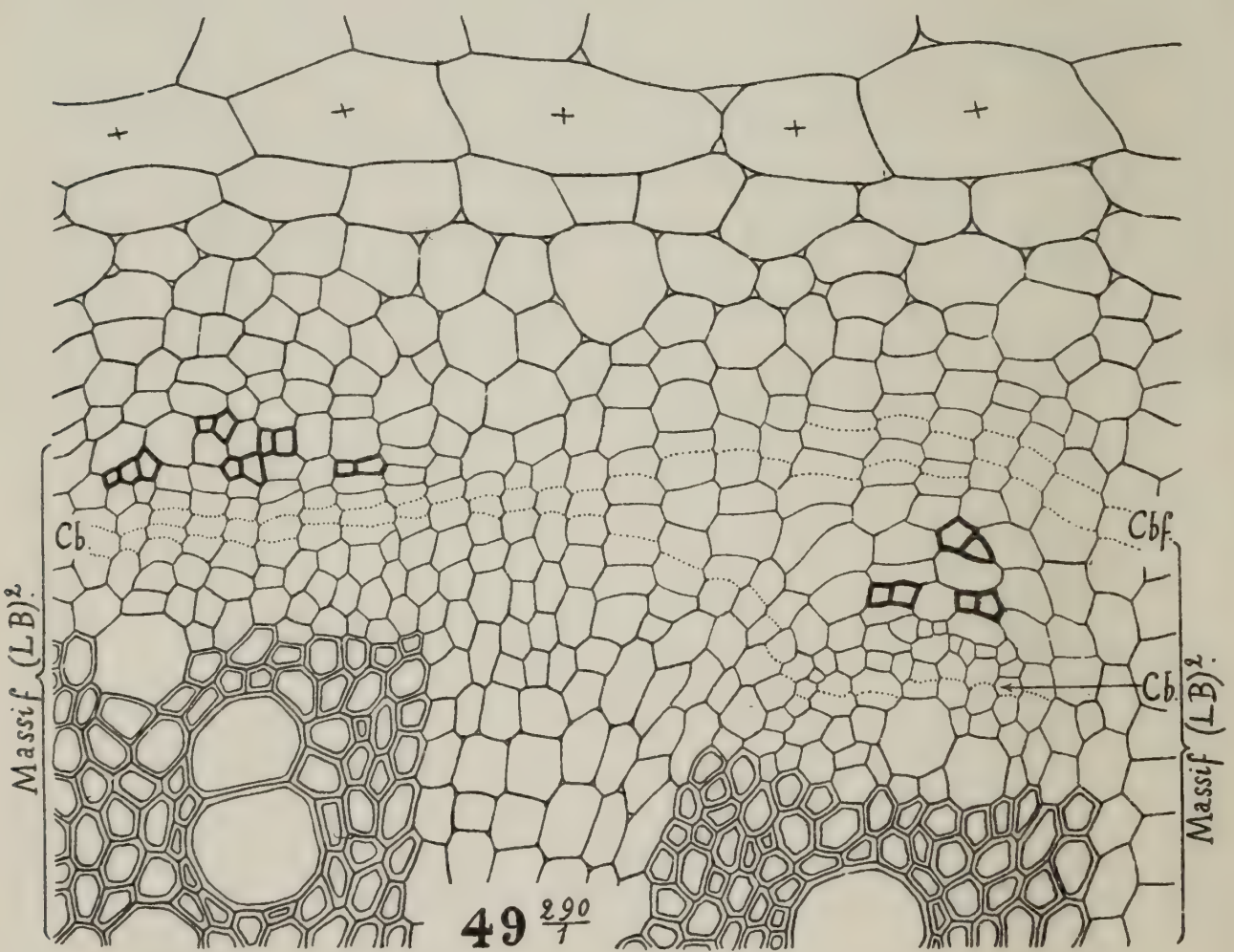
Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

Accroissement secondaire de la tige.



48 $\frac{290}{1}$



49 $\frac{290}{1}$

A. GRAVIS ad. nat. del.

Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

Accroissement secondaire de la tige.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XII.

Suite de la série précédente (voir explication des planches X et XI.)

Fig. 48. — L'arc cambial a produit un massif libéro-ligneux secondaire (p. 26).

Fig. 49. — Des recloisonnements cambiformes se manifestent en dehors du massif libéro-ligneux secondaire du côté droit (saut de la zone génératrice) (p. 26).

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIII.

Les figures 50, 51 et 52 représentent des portions rigoureusement comparables de l'entrenœud [1] de trois tiges principales d'âge différent.

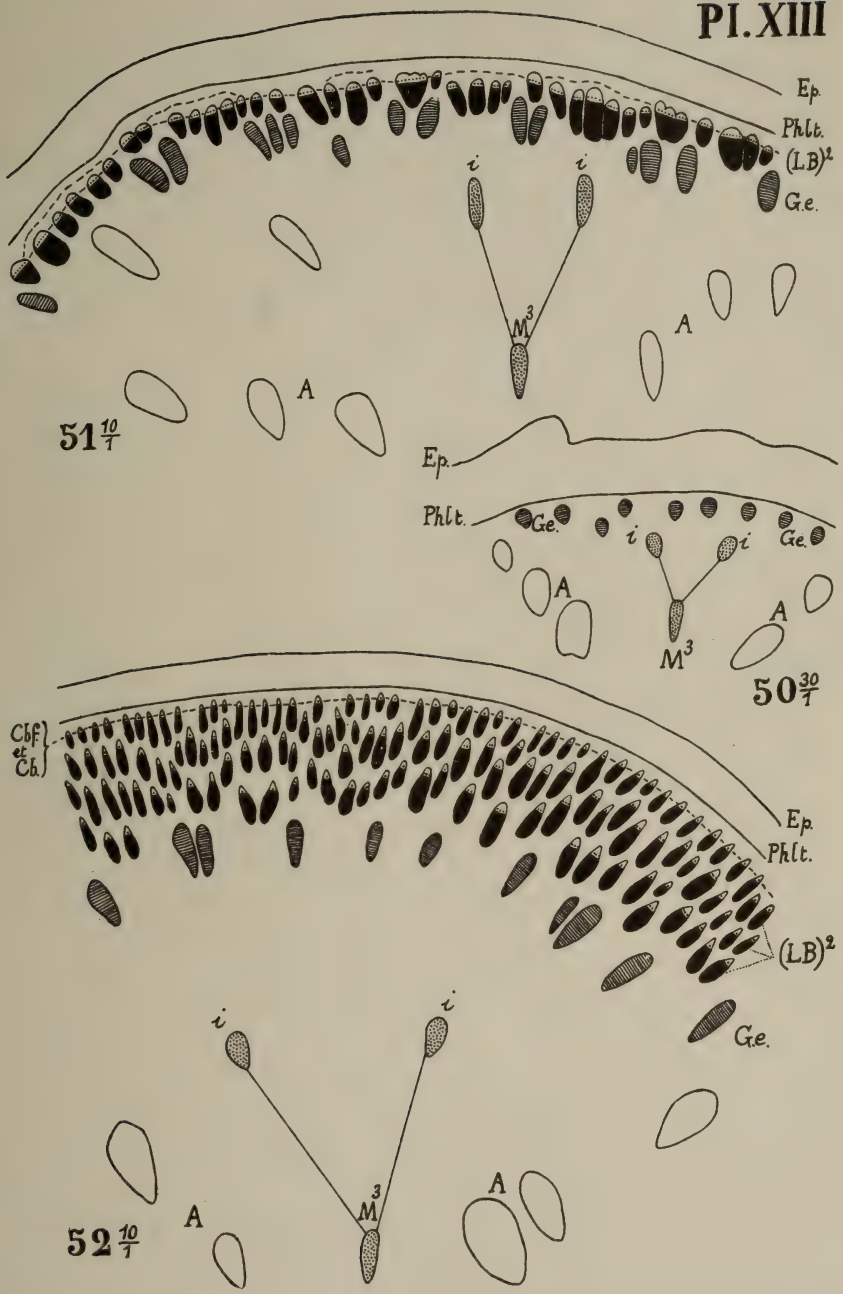
Fig. 50. — Avant l'apparition du cambiforme dans une jeune tige.

Fig. 51. — Pendant le fonctionnement de la zone génératrice dans une tige presque adulte.

Fig. 52. — Pendant le fonctionnement de la zone génératrice dans une tige vieille.

(La description de ces coupes a été faite pp. 27 et 28.)

La zone cambiforme (C*bf*) est indiquée par un trait interrompu; les arcs cambiaux (C*b*) sont représentés en pointillés.

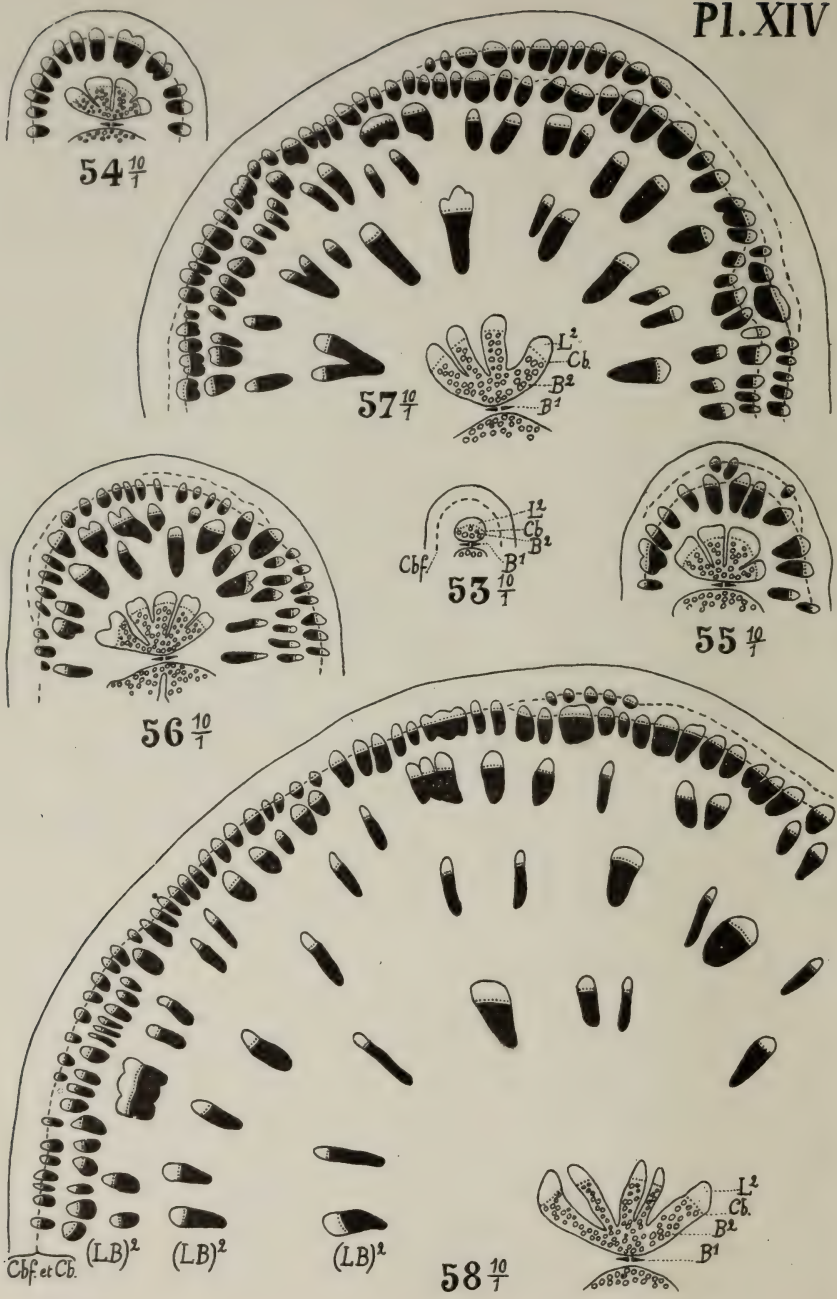


A. GRAVIS ad. nat. del.

Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.

AMARANTUS.

Accroissement secondaire de la tige.



A. GRAVIS ad. nat. del. *Lith. J. L. Goffart, Bruxelles.*

AMARANTUS.

Accroissement secondaire de la racine.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIV.

Les figures 53 à 58 représentent six niveaux échelonnés dans une vieille racine principale, pivotante et conique.

Fig. 53. — Correspond à la partie grêle, jeune encore, de cette racine.

Fig. 58. — Correspond à la partie la plus renflée et la plus âgée.

(La description de ces coupes a été faite p. 28.)

B^1 désigne les deux massifs ligneux primaires;

B^2 et L^2, le bois et le liber secondaires normaux;

C*bf*, le cambiforme; C*b*, les arcs cambiaux;

$(LB)^2$, les massifs libéro-ligneux secondaires.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION 3

CHAPITRE PREMIER. — **Parcours des faisceaux.**

§ I. TYPE 5

I. Trace foliaire 7

II. Trace gemmaire 11

§ II. VARIATIONS DU TYPE DANS L'ÉTENDUE DE LA TIGE 13

Caractères extérieurs 13

A. Hypocotyle. 15

B. Région végétative de la tige 17

C. Axe de l'inflorescence 20

CHAPITRE II. — **Accroissement diamétral secondaire.**

1. Tige 24

2. Hypocotyle et racine 28

3. Trajet des massifs libéro-ligneux secondaires 29

HISTORIQUE :

1. Disposition et parcours des faisceaux 30

2. Accroissement secondaire de la tige et de la racine. . . . 31

3. Lieu de formation des zones génératrices secondaires . . . 35

4. Comparaison avec les Monocotylées 38

RÉSUMÉ 40

CONCLUSIONS. 47

BIBLIOGRAPHIE 49

ABRÉVIATIONS EMPLOYÉES DANS LES FIGURES. 51

EXPLICATION DES PLANCHES 52

NOTES

DE

GÉOMÉTRIE

PAR

Lucien GODEAUX

ÉTUDIANT EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, A LIÉGE.

NOTES DE GÉOMÉTRIE

I. — Une surface cubique à deux points doubles.

1. Soient A_1, A_2 deux points quelconques de l'espace et B_1, B_2, B_3, B_4 les points de base d'un faisceau de coniques dans un plan α ne passant ni par A_1, ni par A_2.

Proposons-nous de rechercher le lieu des points tels que les droites qui les joignent aux points A_1, A_2 rencontrent le plan α en deux points situés sur une même conique du faisceau.

Soient (D_1), (D_2) deux ponctuelles ayant comme support commun une droite d quelconque. Par D_1 et A_1, menons la droite g_1, le point (α, g_1) détermine une conique du faisceau. La surface conique qui projette cette conique du point A_2 marque sur d deux points D_2. Inversement, à un point D_2 correspondent deux points D_1. Entre les ponctuelles (D_1), (D_2) existe donc une correspondance (2, 2). Une coïncidence des points D_1, D_2 est un point du lieu cherché. D'après le principe de Chasles, il y a quatre de ces coïncidences sur d, mais l'une est le point (d, α). Donc :

Si les côtés d'un angle variable passent par des points fixes et rencontrent un plan en deux points d'une même conique d'un faisceau donné, le sommet de l'angle décrit une surface du troisième ordre.

2. Soit g une droite passant par A_1. Les droites passant par A_2 et s'appuyant sur la conique du faisceau déterminée par le point (g, α) et sur la droite g sont au nombre de deux. L'une d'elles passe par le point (g, α); ce dernier ne faisant pas généralement partie de la surface cubique, il en résulte qu'une droite passant par A_1 ne rencontre plus cette surface qu'en un point,

le point A_1 est donc *double*. Il en est de même du point A_2 et la droite $a \equiv A_1A_2$ appartient à la surface.

3. Recherchons les autres droites de la surface.

La droite $b_{ij} \equiv A_iB_j (i = 1, 2 ; j = 1, 2, 3, 4)$ appartient évidemment à la surface. On trouve ainsi huit droites.

Désignons par (m_1, m_2), (n_1, n_2), (p_1, p_2) les couples de côtés opposés (B_1B_2, B_3B_4), (B_1B_3, B_2B_4), (B_1B_4, B_2B_3) du quadrangle complet $B_1B_2B_3B_4$ et soient M, N, P les points de concours de deux côtés opposés. Les plans A_1m_1, A_2m_2 ont en commun une droite m_1' passant par M, et comme elle rencontre les quatre droites b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} de la surface, elle y est contenue tout entière.

Nous obtenons ainsi six droites, à savoir :

$$(A_1m_1,\ A_2m_2) \equiv m_1', \qquad (A_1m_2,\ A_2m_1) \equiv m_2',$$
$$(A_1n_1,\ A_2n_2) \equiv n_1', \qquad (A_1n_2,\ A_2n_1) \equiv n_2',$$
$$(A_1p_1,\ A_2p_2) \equiv p_1', \qquad (A_1p_2,\ A_2p_1) \equiv p_2'.$$

Les droites m_1', m_2' ayant le point commun M, les droites n_1', n_2' le point N et les droites p_1', p_2' le point P ; de plus, les plans $m_1'm_2'$, $n_1'n_2'$ et $p_1'p_2'$ passant par une même droite, celle-ci doit faire partie de la surface.

La surface cubique générale possède vingt-sept droites, mais dans le cas particulier où cette surface a deux points doubles, on sait que la droite a compte pour quatre et chacune des droites b_{ij} pour deux. Nous avons donc déterminé toutes les droites de la surface.

4. On peut démontrer directement que tout plan π mené par la droite A_1A_2 rencontre la surface cubique suivant une conique.

En effet, soit Q l'intersection de la droite A_1A_2 et du plan α, et q la droite commune aux plans π et α. Le faisceau de coniques marque sur q des couples de points (N, N') en involution. Il est clair que les droites A_1N et A_2N', A_1N' et A_2N se coupent en des points R, S de la surface cubique. Or A_1N et A_2N', A_1N' et A_2N sont des éléments homologues de deux faisceaux projectifs ; donc les points R et S engendrent une conique. La droite RS

passe par un point fixe U, conjugué harmonique de Q par rapport à A_1A_2; car RS est une diagonale d'un quadrilatère complet $A_1A_2N'N$.

II. — Sur la cubique gauche.

Dans cette note, nous donnons un procédé pour construire la cubique gauche donnée par cinq points et une bisécante.

Nous démontrerons d'abord deux propositions qui nous ont conduit à cette construction.

1. *Si un triangle* ABC *se déforme de manière que deux côtés* AB, AC *tournent autour de deux points fixes* C′, B′ *et que les sommets* B, C *se meuvent dans deux plans donnés* β *et* γ, *tandis que le troisième côté* BC *s'appuie constamment sur une droite donnée* l, *le sommet* A *décrit une quadrique passant par* B′, C′ *et par la droite* $\beta\gamma$.

En effet, un plan quelconque π mené par la droite B′C′ rencontre les plans β, γ suivant deux droites *b*, *c* et la droite *l* en un point L. Si dans ce plan on mène par L une droite quelconque qui rencontre *b* en B, *c* en C, les droites BC′, CB′ se coupent en un point A du lieu cherché. D'après le théorème de Maclaurin et Braikenridge, on obtient ainsi dans le plan π une conique passant par B′, C′ et par le point de concours U des droites *b*, *c*.

Concluons déjà de là que la droite entière $\beta\gamma \equiv g$ fait partie du lieu.

Projetons les différents points d'une droite *d*, des points B′, C′ respectivement sur les plans β, γ, et joignons les points d'intersection correspondants. Les droites ainsi obtenues décriront évidemment un hyperboloïde à une nappe (*) passant par la droite B′C′. La droite *l* rencontre cette quadrique en deux points qui déterminent deux génératrices. A ces génératrices correspondent des points de la surface cherchée situés sur la droite *d*, donc cette surface est bien du second ordre.

(*) Comparer J. Neuberg, *Question 1628*. (Mathesis, 1907, 3e sér., t. VII, pp. 168 et 254.)

Plus simplement, un plan mené par l et tournant autour de cette droite, marque sur les plans β, γ deux faisceaux projectifs qui ont pour centres les points de rencontre B_1, C_1 de la droite l avec β et γ. Les plans menés par deux rayons homologues de ces faisceaux et respectivement par les droites C_1B, B_1C se coupent suivant une droite h dont tous les points appartiennent au lieu (A); or ces plans engendrent deux faisceaux projectifs.

2. Considérons maintenant un triangle variable ABC, dont deux côtés AB, AC tournent autour de deux points fixes C′, B′; dont les sommets B, C se meuvent dans deux plans donnés β, γ et dont le troisième côté BC doit s'appuyer sur deux droites données l, l_1 (et sur la droite $B'C' \equiv l_2$).

D'après ce qui précède, si BC doit s'appuyer seulement sur l (et sur l_2), le point A décrit une quadrique; si BC s'appuie sur l_1 (et l_2), le point A décrit une seconde quadrique. Ces quadriques ayant une droite commune $\beta\gamma$, leur intersection est une cubique gauche passant par B′, C′ et bisécante à la droite $\beta\gamma$. Donc :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés passent par deux points fixes, tandis que les sommets opposés décrivent deux plans donnés, le troisième côté s'appuyant sur deux droites fixes, le troisième sommet décrira une cubique gauche passant par les points fixes et bisécante à la droite commune aux deux plans donnés.

Voici une démonstration directe de ce théorème. La droite BC qui doit s'appuyer sur l, l_1, l_2 engendre un hyperboloïde qui rencontre les plans β, γ suivant deux coniques K_β, K_γ. L'intersection des cônes (C′, K_β), (B′, K_γ) décrit le lieu cherché. Ces cônes ont la génératrice commune B′C′; car si la droite B′C′ coupe β en B″, γ en C″, on peut prendre pour BC la droite menée par B″ et s'appuyant sur l, l_1; alors A se confondra avec B′, etc.

3. Soient A_1, ..., A_5 cinq points et g une droite. Proposons-nous de construire la cubique gauche passant par ces cinq points et bisécante à la droite.

Nous prendrons A_1, A_2 pour les points B', C' et deux plans quelconques menés par g pour β et γ. Alors, les droites A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 rencontrent β en trois points A'_3, A'_4, A'_5 et les droites A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5 rencontrent en A''_3, A''_4, A''_5 ; les droites $A'_3A''_3$, $A'_4A''_4$, $A'_5A''_5$ représentent trois positions de la droite BC. Pour l et l_1, il suffira de prendre deux droites s'appuyant à la fois sur $A'_3A''_3$, $A'_4A''_4$, $A'_5A''_5$. On remarquera que d'après la construction, ces trois dernières droites s'appuient sur la droite A_1A_2.

III. — Un théorème sur les surfaces.

1. Le théorème donnant le nombre de droites d'une surface d'ordre n possédant une droite multiple d'ordre $(n-2)$ a été démontré par MM. Sturm (*), Murer (**), Fouret (***), Stuyvaert ([IV]) et De Vries ([V]). Dans cette note, nous nous proposons de le démontrer en nous basant sur cette remarque qu'une droite qui rencontre une surface d'ordre n en $(n+1)$ points appartient tout entière à la surface. Cette remarque a déjà été utilisée pour d'autres démonstrations par M. J. De Vries ([VI]) et par nous ([VII]).

2. Soient d la droite multiple et ε_1, ε_2, ε_3 trois sections planes quelconques de la surface.

(*) *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung.* (Math. Ann., 1871, t. IV, pp. 249-283).

(**) *Generazione della superficie d'ordine* n *con retta* (n — 2) *pla.* (Rendiconti di Palermo, 1888, t. II, pp. 107-109.)

(***) *Sur le nombre de plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface.* (Rendiconti di Palermo, 1894, t. VIII, pp. 202-208.)

([IV]) Stuyvaert, *Sur quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Dissertation inaugurale.* Gand, Hoste, 1902, p. 13.

([V]) J. De Vries, *Right lines on surfaces with multiple right lines.* (Proceedings of Amsterdam, 28 avril 1902, pp. 577-583.)

([VI]) *Loc. cit.*, § 6.

([VII]) *Notes de géométrie synthétique.* (Mém. de la Soc. des Sciences de Mons, 6e sér., t. IX, 1907, p. 10.)

Les droites qui s'appuient sur d, ε_1, ε_2 et ε_3 en des points distincts rencontrent la surface en $n + 1$ points, donc elles appartiennent à cette surface.

Considérons la réglée R engendrée par les droites qui s'appuient sur d, ε_1 et ε_2.

L'ordre de multiplicité de d sur R est évidemment égal au nombre de droites passant par un point de d et s'appuyant en des points distincts sur ε_1 et ε_2.

Projetons les courbes ε_1, ε_2 d'un point de d; les cônes ainsi obtenus ont n^2 génératrices communes, mais ε_1 et ε_2 ont n points communs et de plus ont sur d un point multiple d'ordre $n - 2$, donc de ces n^2 droites on doit retrancher n droites et $(n - 2)^2$ fois la droite d; donc la droite d est multiple d'ordre

$$n^2 - n - (n - 2)^2 = 3n - 4.$$

On trouverait de même que chacune des courbes ε_1, ε_2 est multiple d'ordre deux.

Le plan de ε_1 contient n génératrices de R, donc cette surface est d'ordre $2n + n = 3n$.

La surface R rencontre ε_3 en $3n^2$ points; ceux de ces points qui ne sont pas sur d, ε_1 et ε_2 sont au nombre de

$$3n^2 - (n - 2)(3n - 4) - 2 \cdot 2n = 2(3n - 4).$$

Par chacun de ces points passe une droite de la surface donnée. Il est évident que ces droites forment $3n - 4$ coniques dégénérées (*).

Nous remercions M. Neuberg pour les conseils qu'il a bien voulu nous donner pour la rédaction de ce petit travail.

Liége, 24 février 1908.

(*) Après coup, nous devons ajouter : H. Bateman, *The tangent planes which can be drawn to an algebraic surface from a multiple line.* (Archiv der Math. und Phys., 1908, Bd XIII, pp. 48-51.)

SUR

UNE SURFACE PARTICULIÈRE DU SEPTIÈME ORDRE

PAR

Jean DEGUELDRE

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

PRÉFACE

On connaît la génération des coniques d'après Maclaurin et Braikenridge : Étant donnés, dans un même plan, trois points A, B, C et deux droites a, b, si une droite mobile passant par C rencontre a en A′ et b en B′, l'intersection des droites AA′, BB′ engendre une conique.

Il existe des propositions analogues dans l'espace; nous ne citerons que les suivantes, que nous rencontrons dans la géométrie analytique à trois dimensions par Salmon :

Les quatre faces d'un tétraèdre passent chacune par un point fixe; trois des arêtes passent chacune par un point fixe; le sommet par lequel ne passe aucune de ces arêtes décrit une surface cubique.

Trois arêtes d'un tétraèdre partant d'un même sommet A passent chacune par un point fixe et la face opposée passe également par un point fixe; trouver le lieu du sommet A sachant que les autres sommets se meuvent dans des plans fixes.

Un plan passe par un point fixe et coupe trois droites fixes; par chacun des points d'intersection et par chacune des trois autres droites fixes, on mène des plans. Trouver le lieu de l'intersection de ces plans.

Le problème que nous allons traiter est du même genre, mais n'est pas compris dans ceux que nous venons de rappeler ni dans quelques autres qui ont été à notre connaissance. Nous considérons ici un tétraèdre variable $XA_1B_1C_1$ dont les faces tournent autour de quatre points fixes S, A, B, C; les sommets A_1, B_1, C_1 glissent sur trois droites données a, b, c; le lieu du sommet X se compose de l'hyperboloïde dont a, b, c sont des génératrices et d'une surface du septième ordre.

SUR

UNE SURFACE PARTICULIÈRE DU SEPTIÈME ORDRE

1. Soient donnés dans l'espace trois droites a, b, c et quatre points A, B, C, S. Par S, on mène un plan σ coupant a, b, c en A_1, B_1, C_1; les plans

$$(AB_1C_1) \equiv \alpha, \qquad (BC_1A_1) \equiv \beta, \qquad (CA_1B_1) \equiv \gamma$$

se coupent en un point M qui décrit une surface du neuvième ordre lorsque le plan σ décrit la gerbe de centre S.

En effet, une droite quelconque d a neuf points en commun avec la surface. Car soient A′, B′, C′ les points d'intersection de d avec trois plans homologues α, β, γ. Deux d'entre eux étant fixés, par exemple A′ et B′, cherchons combien il leur correspond de points C′. Observons d'abord que α et β sont deux plans tangents aux deux hyperboloïdes (c, AA′, b) et (c, BB′, a) (*). Or les plans tangents communs à ces deux surfaces, qui ont une directrice commune, constituent une développable de la troisième classe, à laquelle on peut mener par S trois plans osculateurs permettant de déterminer trois points C′. Les points A′, B′, C′

(*) Nous désignons un hyperboloïde ou paraboloïde réglés en indiquant trois génératrices de même espèce.

sont donc des groupes de trois points tels que deux d'entre eux étant donnés, il leur correspond trois positions du troisième. On déduit de là que la droite d coupe la surface en neuf points.

Remarquons maintenant que si σ est un plan tangent à l'hyperboloïde $(abc) \equiv H$, c'est-à-dire un plan rencontrant a, b, c en trois points A_1, B_1, C_1, situés sur une même génératrice de H, il lui correspond trois plans α, β, γ se coupant suivant cette droite A_1C_1 qui fait donc partie de la surface lieu de M. Lorsque σ roule sur le cône circonscrit à H de sommet S, la droite correspondante décrit cette surface H. La surface lieu de M se décompose donc en cet hyperboloïde et une surface du septième ordre S_7.

Il est utile de séparer nettement les deux parties du lieu. Considérons, à cet effet, un point M de H, et soit m la génératrice qui passe par ce point en s'appuyant sur a, b et c. Proposons-nous de retrouver le plan σ qui a donné naissance au point M. Nous rechercherons le plan β en supposant que les plans correspondants α et γ passent par M. Soient B_1 un point quelconque de b; C_1 le point d'intersection de c avec le plan unissant B_1 à la droite AM et A_1, celui de a avec le plan unissant B_1 à la droite CM. Lorsque le point B_1 parcourt b, les droites B_1C_1 et B_1A_1 engendrent les deux surfaces du second ordre (c, AM, b), (b, CM, a) auxquelles on peut mener par S quatre plans tangents communs. Le plan σ cherché est nécessairement l'un de ces plans. Le plan $\sigma \equiv (Sm)$ convient; mais alors les plans homologues α, β, γ passent non seulement par M, mais contiennent la droite m. Il faut écarter le plan $\sigma \equiv (Sb)$, car si E et F, G et H sont les points d'intersection de ce plan avec c et AM, CM et a, les droites EF et GH ne concourent pas en un point de b. Enfin, il faut également rejeter les deux autres plans, qui, étant indépendants de B, déterminent des plans β ne passant pas par M. L'hyperboloïde (abc) est donc engendré par l'une de ses génératrices d'une seule façon.

Nous ferons constamment usage, dans la suite, de la proposition suivante, dont la démonstration n'est qu'une application directe du principe de correspondance de Chasles : Soient a et

b deux droites de l'espace, prises comme supports de deux ponctuelles (A), (B) entre les éléments desquelles existe une correspondance (m, n). Le lieu de la droite AB de jonction des points homologues est une surface d'ordre et de classe $m + n$.

On peut observer que la démonstration que nous avons donnée de l'ordre de la surface ne s'applique pas à une droite d de l'hyperboloïde (a, b, c). Nous allons montrer, en modifiant légèrement le procédé employé, qu'une telle droite rencontre la surface S_7 en sept points. On sait qu'au plan $\sigma \equiv (Sd)$ correspond une droite de (abc) qui est l'une des deux génératrices de l'hyperboloïde situées dans le plan (Sd); nous écarterons ce plan des plans σ que nous allons considérer.

Désignons par A′, B′ et C′ les points d'intersection de d avec trois plans correspondants α, β et γ. Les points A′ et B′ étant supposés confondus en un point de d, cherchons combien il leur correspond de point C′. Unissons par des plans α et β les droites AA′ et BA′ à un point C_1 de c; soient B_1 et A_1 les points d'intersection de b avec α et de a avec β. Le plan $A_1B_1C_1$ est un plan tangent commun aux deux hyperboloïdes (c, AA', b), (c, BB', a). Or on peut mener par S, indépendamment du plan (Sd), trois plans tangents communs à ces deux surfaces qui permettent de trouver trois points C′.

Inversement le point C′ étant fixé sur d, combien de fois les points A′ et B′ coïncideront-ils lorsque γ décrit le faisceau d'axe CC′? Cherchons la correspondance qui unit les points A′ et B′. On voit facilement que B_1C_1 décrit une surface de la troisième classe; le point A′ étant pris arbitrairement sur d, il suffira de prendre pour α un des deux plans tangents qu'on peut mener à cette surface par AA′, indépendamment du plan (Ad) qui a été écarté, ce qui fera connaître deux points B′. Les points A′ et B′ étant liés par une correspondance (2, 2) ont quatre coïncidences. Les points A′ et B′ confondus et le point C′ étant liés par une correspondance (4, 3), coïncideront 7 fois en des points qui appartiennent à la surface S_7.

Dans la suite nous désignerons par (HS) la surface complète du lieu; lorsque nous n'aurons en vue que la surface du sep-

tième ordre, nous la désignerons par S_7. Nous pouvons à présent énoncer le théorème :

Soit un trièdre dont les faces passent par trois points fixes; si ses arêtes coupent trois droites fixes en trois points tels que leur plan passe constamment par un point fixe, le sommet de ce trièdre décrit une surface du septième ordre.

2. Nous allons établir l'ordre de la surface (HS) par un autre procédé qui nous sera utile dans la recherche des singularités de S_7. Déterminons le nombre des points du lieu situés sur une droite d passant par un des points A, B, C, par exemple par A. A cet effet menons par d un plan α quelconque, rencontrant c, b en C_1, B_1 et soit A_1 le point du plan σ correspondant situé sur a. Lorsque σ décrit le faisceau d'axe d, la droite B_1C_1 engendre l'hyperboloïde (bcd) tandis que B_1A_1 et A_1C_1 engendrent des surfaces de la troisième classe : car il est facile de voir que les points C_1, A_1, par exemple, sont liés par une correspondance (2, 1); en effet C_1 étant connu, α, σ et par suite A_1 le sont aussi; mais si A_1 est donné, il faudra pour déterminer C_1, mener par SA_1 un plan tangent à l'hyperboloïde (b, c, d); or on peut en mener deux.

Cela posé, soient B′, C′ les points d'intersection de d avec les plans

$$\beta \equiv (BA_1C_1), \qquad \gamma \equiv (CA_1B_1).$$

On obtiendra un point de (HS) sur d lorsque B′ et C′ coïncideront. Or il est visible que B′, C′ sont des couples de points entre lesquels existe une correspondance (3, 3); car B′ étant fixé, on obtiendra le plan β en menant par BB′ un plan tangent à la surface de la troisième classe engendrée par A_1C_1. Les points B′ et C′ ont donc six coïncidences qui donnent six points de (HS) sur d.

Il reste à voir s'il n'en existe pas d'autres confondus avec A et provenant de plans α ne passant pas par d. On voit facilement que les plans β et γ passeront par A lorsque A_1C_1 s'appuiera

sur AB et A_1B_1 sur AC. Le plan σ sera alors un plan tangent commun aux deux hyperboloïdes

$$(a, c, \text{AB}), \qquad (a, b, \text{AC}).$$

Or on peut mener par S, indépendamment du plan (Sa), trois plans tangents communs σ_1, σ_1', σ_1'' à ces deux surfaces. A étant un point triple de la surface (HS), la droite d la rencontre en neuf points.

Nous désignerons par α_1, α_1', α_1'' les plans de la gerbe de centre A correspondant aux plans σ_1, σ_1', σ_1''.

Soient de même σ_2, σ_2', σ_2'' des plans tangents communs aux surfaces (c, b, AB), (a, b, CB) auxquels correspondent triplement le point B et β_2, β_2', β_2'', leurs homologues dans la gerbe B; σ_3, σ_3', σ_3'' les trois plans tangents communs à (b, c, CA), (a, c, CB) donnant naissance au point triple C et γ_3, γ_3', γ_3', leurs homologues dans la gerbe du centre C.

3. Les droites a, b, c sont des droites simples de S_7. Prenons en effet un plan σ passant par SA et coupant a en A_1; les plans α, β, γ qui en résultent passent par A_1, car α se confond avec σ. Lorsque σ décrit le faisceau d'axe SA, le point A_1 décrit la droite a; a et par analogie b et c appartiennent à la surface S_7.

Prenons pour σ la face ASB du trièdre SABC et soient A_1, B_1, C_1 ses points d'intersection avec a, b, c. On a dans ce cas

$$\alpha \equiv (AB_1C_1) \equiv \sigma, \qquad \beta \equiv BC_1A_1) \equiv \sigma, \qquad \gamma \equiv (CA_1B_1).$$

Les trois plans α, β, γ se réduisant à deux se coupent suivant une droite $A_1B_1 \equiv c_{12}$ de S_7.

Remarquons que les sept points de S_7 situés sur AB sont les points A et B qui comptent chacun pour trois et le point commun à AB et à c_{12}.

On trouve semblablement dans les deux autres faces BSC et CSA du trièdre SABC deux autres droites a_{23} et b_{13} de S_7.

En général, un quaterne de plans correspondants α, β, γ, σ est déterminé par la connaissance de l'un d'eux. Mais il arrive aussi

que l'un de ces plans est tel que sa connaissance n'entraîne pas nécessairement celle des autres. Nous appellerons un tel plan, *plan singulier*. L'examen des plans singuliers nous fera connaître des singularités de la surface S_7.

Soient A_{12} et A_{13} les points d'intersection de a avec les plans (Bc) et (Cb); B_{11} et B_{13} ceux de b avec les plans (Ac) et (Ca); C_{11} et C_{12} ceux de c avec les plans (Ab) et (Ba) les droites $B_{11}C_{11}$, $C_{12}A_{12}$, $A_{13}B_{13}$ passent respectivement par A, B, C (*).

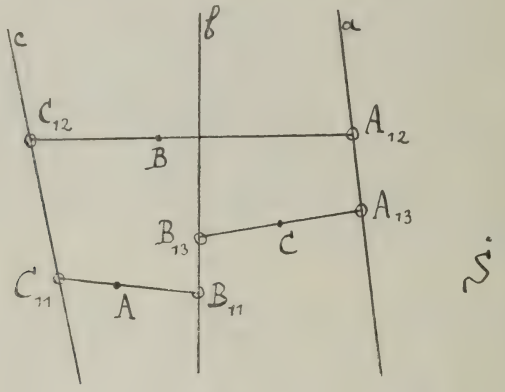


Fig. 1.

Examinons le plan singulier $\sigma \equiv (SB_{11}C_{11})$, et soit A_1 son point d'intersection avec a; les plans correspondants

$$\beta \equiv (BC_{11}A_1), \qquad \gamma \equiv (CA_1B_{11})$$

se coupent suivant une droite g_1 de S_7 passant par A_1, car α est un plan arbitraire passant par $B_{11}C_{11}$.

Semblablement les deux plans singuliers $\sigma \equiv (SC_{12}A_{12})$ et $\sigma \equiv (SA_{13}B_{13})$ font connaître deux autres droites g_2 et g_3 de S_7.

(*) La notation que nous employons pour représenter ces points doit s'entendre de la façon suivante : la lettre et le premier indice ont la signification ordinaire; ainsi dans le point A_{12} la partie A_1 signifie simplement que le point appartient à a, tandis que le second indice 2 indique que ce point se trouve sur une droite passant par le second point B.

Observons qu'au plan $\sigma \equiv (SB_{11}A_{12})$ correspondent les plans

$$\alpha \equiv (Ac), \qquad \beta \equiv (Bc), \qquad \gamma \equiv (CA_{12}B_{11})$$

qui se coupent en un point C_{III} de c qui est un *point double* de S_7; car il résulte une première fois du plan $\sigma \equiv (SCC_{III})$.

De la même façon la considération des plans $\sigma \equiv (SA_{13}C_{11})$ et $\sigma \equiv (SB_{13}C_{12})$ fait connaître deux autres points doubles B_{II}, A_I de S_7 situés respectivement sur b et a.

Soient x, y, z les sécantes communes, menées par S aux couples de droites b et c, c et a, a et b; Y_a et Z_a les points d'intersection de a avec y et z; Z_b et X_b ceux de b avec z et x; X_c et Y_c ceux de c avec x et y.

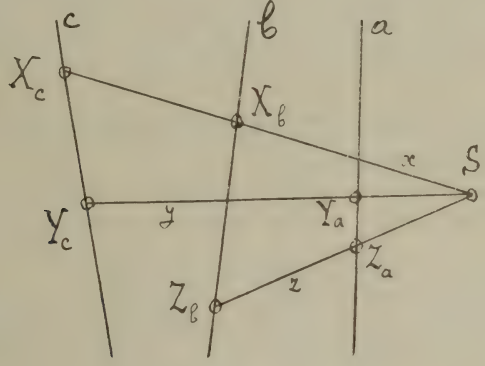


Fig. 2.

Examinons le plan singulier $\sigma \equiv (Sc)$. Le plan γ correspondant est le plan fixe CY_aX_b, tandis que α et β sont deux plans joignant les droites AX_b et BY_a à un point quelconque de c; lorsque ce point parcourt c, l'intersection des plans α et β décrit l'hyperboloïde (c, AX_b, BY_a); le plan CY_aX_b le coupe suivant une courbe du second ordre appartenant à la surface (HS). Cette courbe se décompose en deux droites, dont l'une Y_aX_b appartient à (a, b, c) et dont l'autre appartient nécessairement à S_7. Nous la représenterons par c_3; il est visible qu'elle ne s'appuie sur aucune des droites de S_7 déjà trouvées. On en obtient deux de ses points de la manière suivante : soient C′ et

C'' les points d'intersection de c avec les plans (AX_bC) et (BCY_a); les plans (BY_aC') et (AX_bC'') coupent respectivement CX_b et CY_a aux deux points cherchés.

Semblablement les deux plans singuliers $\sigma \equiv (Sb)$ et $\sigma \equiv (Sa)$ font connaître deux autres droites b_2 et a_1 de S_7; elles sont respectivement situées dans les plans (BX_cZ_a) et AX_bY_c.

Considérons le plan singulier

$$\alpha \equiv (AX_bX_c).$$

Le plan σ correspondant étant un plan quelconque passant par x, les plans β et γ sont deux plans unissant les droites BX_c et CX_b à un point quelconque de a. Lorsque ce point parcourt a, la droite d'intersection des plans β et γ décrit l'hyperboloïde (BX_c, CX_b, a), lequel est coupé par le plan α suivant une conique Σ_1 appartenant à S_7. Σ_1 passe nécessairement par X_b et X_c.

Il est facile de vérifier que Σ_1 rencontre c_3 et par analogie b_2; en effet les plans homologues

$$\alpha \equiv (AX_bX_c), \qquad \beta \equiv (BX_cY_a), \qquad \gamma \equiv (CX_bY_a)$$

se coupent en un point commun à Σ_1 et c_3.

Semblablement, les plans singuliers $\beta \equiv (BY_aY_c)$ et $\gamma \equiv (CZ_aZ_b)$ contiennent deux autres coniques Σ_2 et Σ_3 de S_7; la première passe par Y_a, Y_c et rencontre c_3 et a_1; la seconde passe par Z_a, Z_b et s'appuie sur a_1 et b_2.

Il est facile de vérifier que deux de ces coniques, par exemple Σ_1 et Σ_2, ne se rencontrent pas. En effet, les points de ces coniques résultent respectivement de plans σ passant par x et y. Si elles avaient un point commun, ce point ne pourrait provenir que du plan $\sigma \equiv (Sc)$ qui passe à la fois par x et y. Or, à ce plan correspond, sur Σ_1, le point d'intersection des plans homologues

$$\alpha \equiv (AX_cX_b), \qquad \beta \equiv (BY_aX_c), \qquad \gamma \equiv (CX_bY_a)$$

et sur Σ_2 le point d'intersection des plans

$$\alpha \equiv (AX_bY_c), \qquad \beta \equiv (BY_cY_a), \qquad \gamma \equiv (CX_bY_a).$$

Ces points appartiennent à c_3, mais ils sont distincts ; car il est visible que ces plans ne passent pas par un même point.

Observons encore que l'on connaît les sept points communs à S_7 et aux droites SA, SB, SC ; ainsi ceux de SA sont le point A qui compte pour trois, les deux points communs à SA et à la conique Σ_1 et les deux points d'intersection de SA avec les droites de la surface c_{12}, b_{13}. Aucun de ces points ne coïncidant avec S, on voit, nous l'avons déjà signalé, que S_7 ne passe pas par S.

Prenons pour α le plan singulier

$$\alpha \equiv (Ac).$$

Le plan σ correspondant est un plan quelconque passant par SB_{11} et rencontrant a et c en A_1 et C_1. A ce plan α il correspond une infinité de couples de plans β, γ. Lorsque σ décrit le faisceau d'axe SB_{11}, la droite A_1C_1 engendre une surface réglée du second ordre, à laquelle β est constamment tangent. On s'assure facilement que la droite d'intersection des plans homologues β et γ engendre une surface réglée du troisième ordre. En effet, soient B′ et C′ leurs points d'intersection avec une droite quelconque d ; il suffit de remarquer que ces points décrivent deux ponctuelles superposées, liées par une correspondance (1, 2). Le plan $\alpha \equiv (Ac)$ rencontre cette surface en une courbe du troisième ordre appartenant à (HS) ; elle se décompose en une droite, la seconde génératrice de (a, b, c) passant par B_{11} et une conique $\mathcal{X}_3$ appartenant à S_7.

$\mathcal{X}_3$ rencontre b en B_{11}, point qui correspond au plan $\sigma \equiv (SBB_{11})$. $\mathcal{X}_3$ étant située dans un plan passant par c rencontre cette droite en deux points, dont l'un est le point double C_{III}. Ces deux points résultent des plans $\sigma \equiv (SB_{11}C)$, $\sigma \equiv (SB_{11}A_{12})$.

$\mathcal{X}_3$ ne rencontre pas a mais s'appuie sur g_1 au point qui correspond au plan $\sigma \equiv (SB_{11}A)$; car on a vu précédemment que les plans β et γ qui lui correspondent se coupent suivant g_1 ; le plan $\alpha \equiv (Ac)$ coupe cette droite en un point de $\mathcal{X}_3$.

$\mathcal{X}_3$ rencontre b_2 ; en effet, les plans homologues

$$\alpha \equiv (AB_{11}X_c) \text{ ou } (Ac), \qquad \beta \equiv (BZ_aX_c), \qquad \gamma \equiv (CB_{11}Z_a)$$

se coupent en un point commun à $\mathcal{X}_3$ et b_2.

$\mathfrak{X}_5$ rencontre Σ_2 en un point de la S_7 correspondant au plan $\sigma \equiv (yB_{11})$; c'est le second point d'intersection du plan (Ac) avec Σ_2, le premier de ces points étant Y_c.

Enfin, $\mathfrak{X}_5$ ne rencontre ni Σ_1, ni Σ_3, ni les autres droites de la surface S_7.

Par analogie, on a comme courbes de la S_7 :

Dans le plan (Ab) une conique $\mathfrak{X}_2$ s'appuyant sur b, c, c_3, g_1, Σ_3 et passant par le point double B_{II} ;

Dans le plan (Ba) une conique Ψ_1 s'appuyant sur a, c, c_3, g_2, Σ_3 et passant par le point double A_I ;

Dans le plan (Bc) une conique Ψ_3 s'appuyant sur a, c, a_1, g_2, Σ_1 et passant par le point double C_{III} ;

Dans le plan (Ca) une conique Φ_1, s'appuyant sur a, b, b_2, g_3, Σ_2 et passant par le point double A_I ;

Dans le plan (Cb) une conique Φ_2 s'appuyant sur a, b, a_1, g_3, Σ_1 et passant par le point double B_{II}.

On voit que les six coniques $\mathfrak{X}$, Ψ et Φ passent deux à deux par le point double portant le même indice.

Deux quelconques d'entre elles affectées d'indices différents ne se coupent pas. Considérons d'abord deux coniques $\mathfrak{X}_5$ et $\mathfrak{X}_2$ représentées par la même lettre. Leurs plans (Ac) et (Ab) se coupent suivant la droite $B_{11}C_{11}$. $\mathfrak{X}_5$ rencontre d'abord cette droite en B_{11}, comme on l'a vu, et en un second point résultant du plan $\gamma \equiv (CB_{11}C_{11})$, tandis que $\mathfrak{X}_2$ la rencontre en C_{11} et en un point résultant du plan $\beta \equiv (BC_{11}B_{11})$. Soient $\beta \equiv (BA_1C_1)$ l'homologue du premier de ces plans et $\gamma \equiv (CA_2B_2)$ l'homologue du second. Ces deux plans rencontrent $B_{11}C_{11}$ en deux points différents, car, si l'on imagine que c tourne autour de C_{11}, le premier de ces plans tourne autour de BA_1 tandis que le second reste invariable.

Considérons à présent deux coniques telles que $\mathfrak{X}_5$ et Φ_1 représentées par des lettres différentes. On a vu que les points de $\mathfrak{X}_5$ résultent de plans σ passant par SB_{11}, tandis que ceux de Φ_1 résultent de plans passant par SB_{13} ; si $\mathfrak{X}_5$ et Φ_1 ont un point commun, il doit correspondre au plan $\sigma \equiv (SB_{11}B_{13}) \equiv (Sb)$; les deux points qu'on obtient de cette façon sont des points différents de b_2.

Nous pouvons à présent formuler la remarque suivante :

Les neuf coniques Σ, $\mathfrak{X}$, Ψ, Φ *constituent un groupe tel que chacune d'elles s'appuie sur deux des autres et sur quatre des douze droites de la surface.*

4. *Aux plans* σ *d'un même faisceau correspondent sur la surface* S_7 *les points d'une courbe gauche,* C_4, *du quatrième ordre.*

En effet, soit d l'axe de ce faisceau. On s'assurera de l'ordre de la courbe correspondante en cherchant le nombre de ses points situés dans un plan π, passant par l'une des droites a, b, c, par exemple c. Nous faisons abstraction des deux plans tangents menés par d à l'hyperboloïde (a, b, c) qui donnent deux droites de cette surface.

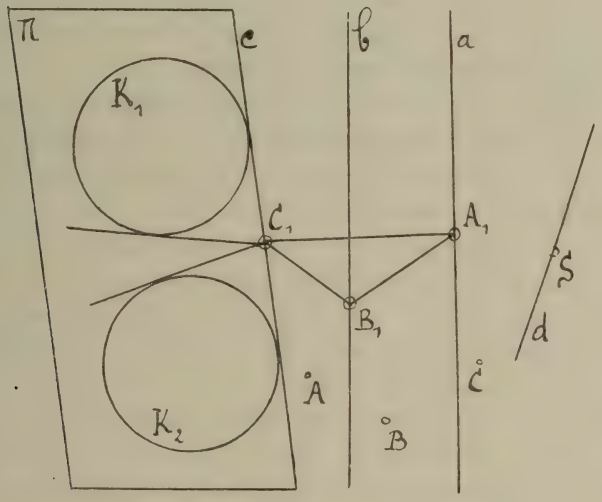


Fig. 3.

Remarquons d'abord que le plan $\sigma \equiv (dC)$ donne un point situé sur c; c'est évidemment le seul point de la courbe situé sur c.

On obtiendra un point de la courbe dans le plan π lorsque les plans correspondants

$$\alpha \equiv (AB_1C_1), \qquad \beta \equiv (BC_1A_1)$$

se couperont suivant une droite de π. Or, lorsque σ décrit le faisceau d, les droites B_1C_1 et C_1A_1 engendrent deux hyperboloïdes réglés (b, c, d), (c, a, d), tandis que les plans α et β roulent sur des cônes circonscrits à ces surfaces. Le plan π coupe ces cônes suivant deux coniques K_1 et K_2 tangentes à c. Comme elles possèdent trois autres tangentes communes, les traces des plans α et β coïncideront, au plus, trois fois. Si l'on remarque que la trace du plan β homologue du plan $\alpha \equiv (Ac)$ n'est pas tangente à K_1 et que semblablement celle du plan α correspondant au plan $\beta \equiv (Ac)$ n'est pas tangente à K_2, on peut affirmer que le nombre de ces coïncidences est trois. On trouve donc dans le plan π trois points de la courbe non situés sur c.

Cette courbe C_4 rencontre une fois chacune des droites a, b, c et chacune des neuf coniques $\mathfrak{X}$, Ψ, Φ, Σ. Deux de ces courbes n'ont évidemment qu'un seul point commun.

La démonstration précédente doit être légèrement modifiée lorsque l'axe d du faisceau rencontre l'une des droites a, b, c, cette dernière, par exemple, en un point C_1. Ce point appartient d'abord à la courbe correspondante, car il résulte du plan $\sigma \equiv (dC)$. Le plan singulier $\sigma \equiv (Sc)$ donne naissance à un point de la courbe, situé dans π; c'est le point d'intersection de c_3 avec π. Pour obtenir les autres, on observe que les traces, sur π, des plans homologues α et β décrivent deux faisceaux projectifs de rayons ayant le point C_1 comme sommet commun; les deux rayons doubles de ces faisceaux permettent d'obtenir deux points de la courbe situés dans π. Comme on le voit, la courbe est encore du quatrième ordre, mais elle se décompose en la droite c_3 et une cubique gauche.

Examinons quelques positions particulières de l'axe du faisceau.

Si l'on prend pour axe :

La droite x : la courbe se décompose en la conique Σ_1 et les droites b_2, c_3;

La droite y : la courbe se décompose en la conique Σ_2 et les droites a_1, c_3;

La droite SA : la courbe se décompose en les droites a, c_{12}, b_{13} et g_1;

La droite SB : la courbe se décompose en les droites b, c_{12}, a_{23} et g_2;

La droite SC : la courbe se décompose en les droites c, a_{23}, b_{13} et g_3;

Une droite s'appuyant sur AB : la courbe se décompose en la droite c_{12} et une cubique gauche;

Une droite s'appuyant sur BC : la courbe se décompose en la droite a_{23} et une cubique gauche;

Une droite s'appuyant sur CA : la courbe se décompose en la droite b_{13} et une cubique gauche;

Une droite rencontrant $B_{11}C_{11}$: la courbe se décompose en la droite g_1 et une cubique gauche;

Une droite rencontrant $A_{12}C_{12}$: la courbe se décompose en la droite g_2 et une cubique gauche;

Une droite rencontrant $A_{13}B_{13}$: la courbe se décompose en la droite g_3 et une cubique gauche;

La droite SC_{11} : la courbe se décompose en deux droites c_3, g_1 et la conique $\mathfrak{X}_2$;

La droite SB_{11} : la courbe se décompose en deux droites b_2 et g_1 et la conique $\mathfrak{X}_3$;

La droite SA_{12} : la courbe se décompose en deux droites a_1, g_2 et la conique Ψ_3;

La droite SC_{12} : la courbe se décompose en deux droites c_3, g_2 et la conique Ψ_1;

La droite SA_{13} : la courbe se décompose en deux droites a_1, g_3 et la conique Φ_2;

La droite SB_{13} : la courbe se décompose en deux droites b_2, g_3 et la conique Φ_1;

La sécante commune menée par S à AB et c : la courbe se décompose en deux droites c_{13}, c_3 et une conique (*);

(*) On détermine le plan de cette conique en observant que le lieu de la droite d'intersection des plans α et β se compose de deux plans : l'un est le plan ASB, l'autre est celui de la conique.

La sécante commune menée par S à AB et b : la courbe se décompose en deux droites c_{12}, b_2 et une conique;

La sécante commune menée par S à AB et a : la courbe se décompose en deux droites c_{12}, a_1 et une conique;

La sécante commune menée par S à BC et a : la courbe se décompose en deux droites a_{23}, a_1 et une conique;

La sécante commune à AC et a : la courbe se décompose en deux droites b_{13}, a_1 et une conique;

La sécante commune à AC et b : la courbe se décompose en deux droites b_{13} et b_2 et une conique;

La sécante commune à AC et c : la courbe se décompose en deux droites b_{13}, c_3 et une conique;

Une droite s'appuyant sur a : la courbe se décompose en la droite a_1 et une cubique gauche;

Une droite s'appuyant sur b : la courbe se décompose en la droite b_2 et une cubique gauche;

Une droite s'appuyant sur c : la courbe se décompose en la droite c_3 et une cubique gauche.

Observons que par un point de S_7, il passe une infinité de courbes C_4 et une cubique gauche de chaque espèce. En effet, le point considéré résulte généralement d'un plan unique σ; toute droite de ce plan, passant par S, donne naissance à une C_4 passant par le point considéré; toutefois les neuf droites joignant S aux neuf points d'intersection de σ avec les droites a, b, c, BC, CA, AB, $B_{11}C_{11}$, $C_{12}A_{12}$, $A_{13}B_{13}$ donnent neuf cubiques gauches.

Par deux points quelconques de S_7 il passe une seule courbe C_4; par un point quelconque et l'un des trois points triples, A par exemple, il en passe trois; leurs axes générateurs sont les droites d'intersection du plan σ, homologue du point donné, avec les trois plans σ_1, σ_1', σ_1'' définis précédemment.

Semblablement par l'un des points doubles et un point quelconque de la surface, il passe deux de ces courbes.

5. *Aux plans α d'un même faisceau correspondent sur la surface S_7 les points d'une courbe gauche G_3 du cinquième ordre.*

Soit g l'axe du faisceau. Nous montrerons que la courbe qui

en résulte a cinq de ses points situés dans un plan quelconque π mené par c. Nous écartons les deux plans tangents, menés par g, à l'hyperboloïde (a, b, c) qui donnent deux droites de cette surface.

Observons d'abord que les deux plans tangents, menés par g, à l'hyperboloïde (b, c, SC) donnent naissance à deux points de la courbe situés sur c.

On obtiendra un point de π, non situé sur c, lorsque les traces sur π des plans homologues α et β coïncideront. Or α décrivant une feuillée, sa trace, sur π, décrit un faisceau de rayons ayant pour sommet le point P de percée de g avec π; la droite C_1A_1 engendrant une surface réglée de la troisième classe, le plan β engendre un cône circonscrit à cette surface; π coupe ce cône suivant une courbe de la troisième classe. Les traces des plans α et β auront donc trois coïncidences, à savoir les trois tangentes menées par P à cette courbe. On trouve donc trois points dans π non situés sur c.

Les droites b et c sont, on vient de le voir, des bisécantes de cette courbe G_8; elle ne rencontre a qu'une seule fois en un point situé dans le plan (Sg). Elle rencontre également une fois les droites g_1, b_2, c_3; elle ne s'appuie ni sur les autres droites, ni sur les neuf coniques Σ, $\mathfrak{X}$, Ψ, Φ.

L'axe g du faisceau est une quadrisécante de G_8; on sait, en effet, qu'une telle droite rencontre S_7, indépendamment du point triple A, en quatre points qui appartiennent nécessairement à G_8.

On peut, du reste, démontrer la chose sans tenir compte de l'ordre de la surface S_7. Un plan quelconque α du faisceau rencontre G_8 en cinq points; l'un de ces points est celui qui résulte de ce plan; les autres sont évidemment sur g.

On tire de cette remarque une conséquence curieuse : prenons comme axe g du faisceau une droite du plan α_1. La courbe G_8 rencontre alors g en A; g ne rencontrant plus S_7 qu'en trois points différents de A, est tangente à la surface en ce point. D'où le théorème :

Le lieu des droites tangentes à la surface au point triple A *se compose des trois plans* α_1, α_1', α_1''; *les arêtes du trièdre formé par ces plans sont des tangentes inflexionnelles à la* S_7 *au point* A.

Examinons quelques positions particulières de l'axe g du faisceau.

Un faisceau de plans α dont l'axe

rencontre b, donne la conique $\mathfrak{X}_2$ et une cubique gauche ;

rencontre c, donne la conique $\mathfrak{X}_3$ et une cubique gauche ;

rencontre x, donne la conique Σ_1 et une cubique gauche ;

est la droite $B_{11}C_{11}$, donne la droite g_1 et les deux coniques $\mathfrak{X}_2$ et $\mathfrak{X}_3$;

est la droite AS, donne les droites a, c_{12}, b_{13} et la conique Σ_1;

rencontre BS, donne la droite c_{12} et une courbe gauche du quatrième ordre;

rencontre CS, donne la droite b_{13} et une courbe gauche du quatrième ordre;

est la droite AX_c, donne les deux coniques $\mathfrak{X}_3$, Σ_1 et la droite b_2 ;

est la droite AX_b, donne la droite b_2 et les coniques $\mathfrak{X}_2$, Σ_1 ;

est la droite AB, donne la droite c_{12} et une courbe plane du quatrième ordre située dans le plan (Bc) et ayant en B un point triple. En effet, si de la feuillée AB on détache le plan ASB qui donne naissance à la droite c_{12}, l'intersection des plans homologues α et β décrit le plan (Bc), tandis que celle des plans α et γ engendre une surface réglée du quatrième ordre (on démontre facilement que cette surface a quatre de ses points sur une droite quelconque). Cette dernière est coupée par le plan (Bc) suivant la courbe du quatrième ordre dont il s'agit.

De même, si l'axe du faisceau est la droite AC, la courbe se décompose en la droite b_{13} et une courbe plane du quatrième ordre située dans le plan (Cb) et ayant en C un point triple.

Remarquons que nous connaissons la section complète de la surface S_7 par le plan (Bc); elle se compose de la droite c, de la conique Ψ_3 et d'une autre courbe du quatrième ordre passant trois fois par B.

La section de S_7 par le plan (Cb) se compose de la droite b, de la conique Φ_2 et d'une courbe du quatrième ordre passant trois fois par C.

Semblablement :

Aux plans β ou γ d'un même faisceau correspondent sur la

S_7 les points d'une courbe gauche G_5' ou G_5'' du cinquième ordre. Le lieu des droites tangentes à la surface au point triple B ou C se compose des trois plans β_2, β_2', β_2'', ou γ_3, γ_3', γ_3''; les arêtes du trièdre formé par ces plans sont des tangentes inflexionnelles à la S_7 au point triple B ou C.

Les faisceaux particuliers donnent des décompositions analogues à celles des faisceaux de plans α.

Par un point de la S_7, il passe une infinité de courbes G_5, G_5', G_5''. Par deux points de la surface, il passe une seule courbe G_5, une seule G_5' et une seule G_5''. Par un point quelconque de la surface et l'un des points triples, il passe trois de chacune de ces courbes.

Deux courbes, l'une C_4, l'autre G_5 ou G_5' ou G_5'' se coupent en deux points. En effet, si d et g sont leurs axes générateurs respectifs, les deux plans tangents σ qu'on peut mener par d à l'hyperboloïde (g, b, c) donnent deux points communs aux deux courbes.

Deux courbes G_5 et G_5', ou G_5' et G_5'', ou G_5'' et G_5, se rencontrent trois fois. Soient, en effet, g et g' leurs axes générateurs respectifs. Il suffit de remarquer que lorsque α décrit la feuillée g, le plan β correspondant engendre un cône de la troisième classe auquel on peut mener par g' trois plans tangents qui donnent naissance à trois points communs aux deux courbes.

Observons qu'on a pu, sans tenir compte de l'ordre de la surface S_7, déterminer ses sections par les plans singuliers (Ab),(Ac), (Ba), (Bc), (Ca), (Cb), chacune d'elles se composant d'une droite, d'une conique, et d'une courbe du quatrième ordre. On peut également déterminer celles des plans (Ax), (By), (Cz). Considérons à cet effet une droite g passant par A et s'appuyant sur x. Si l'on prend cette droite comme axe d'un faisceau de plan α, il en résulte, sur la S_7, une courbe gauche du cinquième ordre se décomposant en la conique Σ_1 et une cubique gauche dont g est une bissécante. Lorsque g décrit le plan (Ax), ses deux points d'intersection avec la cubique décrivent une courbe plane du cinquième ordre ayant en A un point triple; on sait, en effet, que si l'on prend comme axes de faisceaux de plans α, les trois

droites d'intersection du plan (Ax) avec les trois plans α_1, α_1', α_1'' on obtient trois cubiques passant par A. Le plan (Ax) coupe donc la S_7 suivant une conique Σ_1 et une courbe du cinquième ordre passant trois fois par A.

On obtient d'une façon analogue les sections de la S_7 par les plans (Aa), (Bb), (Cc). Considérons, à cet effet, une droite g du plan (Aa) passant par A. Si on la prend comme axe d'un faisceau de plans α, elle donne naissance à une courbe gauche du cinquième ordre de la surface et rencontrant g en quatre points, l'un d'eux étant le point commun à g et a. Ce dernier, lorsque g décrit le plan (Aa), décrit la droite a, tandis que les trois autres engendrent une courbe du sixième ordre ayant un point triple A. Le plan (Aa) coupe donc la S_7 suivant une droite a et une courbe du sixième ordre.

6. Plus généralement :

Aux plans σ tangents à un cône C_n de classe n *et de sommet* S, *correspondent sur la surface S_7 les points d'une courbe gauche C_{4n} d'ordre* 4n.

On détermine facilement l'ordre de la courbe correspondante en cherchant le nombre de ses points situés dans le plan (Ac). Nous les classons en trois groupes :

1° Ceux qui sont situés sur c et qui proviennent des n plans tangents σ menés à C_n par SC;

2° Ceux qui appartiennent à $\mathfrak{X}_3$; ils répondent aux n plans tangents σ menés à C_n par SB_{11};

3° Ceux qui n'appartiennent ni à c ni à $\mathfrak{X}_3$; ils résultent de plans β passant par A; ils sont au nombre de $2n$ provenant des $2n$ plans tangents σ communs à (a, AB, c) et C_n. Cette courbe C_{4n} rencontre n fois chacune des neuf coniques Σ, $\mathfrak{X}$, Ψ, Φ et chacune des droites a, b, c; elle ne s'appuie pas sur les autres droites.

Deux courbes C_{4n} se coupent en n^2 points répondant aux n^2 plans tangents communs à leurs cônes générateurs.

Si le cône C_n est tangent à p des plans SAB, SBC, SCA,

$SA_{13}B_{13}$, $SB_{11}C_{11}$, $SC_{12}A_{12}$, (Sa), (Sb), (Sc), la courbe correspondante se compose de p des droites, c_{12}, a_{23}, b_{13}, g_3, g_1, g_2, a_1, b_2, c_3 et d'une courbe d'ordre C_{4n-p} d'ordre $4n-p$. On peut donc, à l'aide de ce procédé, obtenir sur la surface S_7 des courbes de tous les ordres.

Aux plans α *tangents à un cone* G_n *de classe* n *et de sommet* A *correspondent sur la surface les points d'une courbe* G_{5n} *d'ordre* 5n.

On s'assure, comme nous venons de le faire, de l'ordre de la courbe correspondante, en déterminant le nombre de ses points situés dans le plan (Ac). Observons d'abord que les $2n$ plans tangents α communs à (SC, b, c) et G_n donnent $2n$ points de la courbe situés sur c.

On en obtiendra un autre point, dans le plan (Ac), lorsque le plan β passera par A, car alors les plans homologues se couperont suivant une droite du plan (Ac). Or lorsque β décrit le faisceau d'axe BA, la droite B_1C_1 engendre une surface de la troisième classe. Cette dernière et le cône G_n ont en commun $3n$ plans tangents α qui permettent de déterminer $3n$ points de la courbe situés dans le plan (Ac).

La courbe G_{5n}, on vient de le voir, rencontre c et par analogie b, $2n$ fois; elle s'appuie n fois sur chacune des droites a, g_1, c_3 et b_2 en des points résultant des n plans tangents α menés au cône G_n respectivement par SA, $B_{11}C_{11}$, AX_b, AX_c. Elle rencontre de même n fois chacune des coniques Σ_2, Σ_3, Ψ_1, Φ_1 en des points qui correspondent à des plans α passant par AY_c, AZ_b, AC_{12}, AB_{13}. Elle s'appuie $2n$ fois sur les coniques Ψ_3 et Φ_2; il suffit de remarquer que les plans α donnant naissance aux points de ces coniques constituent deux cônes de la seconde classe. Enfin elle ne s'appuie ni sur les coniques $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_2$, Σ_1, ni sur les droites a_1, a_{23}, b_{13}, c_{12}, g_2, g_3.

Deux courbes G_{5n} se coupent en n^2 points qui résultent des n^2 plans tangents α communs à leurs cônes générateurs.

Deux courbes, l'une C_{4n}, l'autre G_{5n}, ont $2n^2$ points communs : il suffit de remarquer que lorsque σ décrit C_n, la droite B_1C_1 engendre une surface réglée de classe $2n$ qui possède, en commun avec le cône G_n, $2n^2$ plans tangents.

Semblablement, aux plans β, ou γ, tangents à un cône G'_n, ou G''_n, d'ordre n et de sommet B, ou C, correspondent sur la surface S_7 les points d'une courbe gauche G'_{5n}, ou G''_{5n} d'ordre $5n$.

Deux courbes, l'une G_{5n}, l'autre G'_{5n}, (ou G'_{5n} et G''_{5n}), (ou G''_{5n} et G_{5n}) se rencontrent $3n^2$ fois. En effet, lorsque α décrit le cône G_n, la droite A_1C_1 décrit une surface réglée de classe $3n$; cette dernière et le cône G'_n possèdent en commun $3n^2$ plans tangents qui donnent naissance à $3n^2$ points appartenant aux deux courbes G_{5n}, G'_{5n}.

Observons encore que, si l'on fait $n = 1$, c'est-à-dire qu'on remplace les cônes C_n, G_n, G'_n, G''_n par des faisceaux de plans, on retrouve les résultats obtenus précédemment.

7. Ce mode de génération de la surface va nous permettre d'obtenir pour des positions particulières des points A, B, C, S, et des droites a, b, c, des surfaces du sixième, du cinquième, du troisième ordre et le plan.

1° Prenons S dans le plan ABC et soient A_1, B_1, C_1 les points d'intersection de ce plan avec a, b, c. Au plan $\sigma \equiv (ABC)$ correspondent les plans

$$\alpha \equiv (AB_1C_1) \equiv \sigma, \qquad \beta \equiv (BC_1A_1) \equiv \sigma, \qquad \gamma \equiv (CA_1B_1) \equiv \sigma$$

et l'on voit que ce plan σ fait entièrement partie de la surface. Celle-ci se décompose donc, dans le cas présent, en l'hyperboloïde (a, b, c), le plan ABC et une surface du sixième ordre; les points ABC, A_I, B_{II}, C_{III}, sont six points doubles de cette dernière.

2° Prenons pour S un point quelconque de la sécante commune $B_{II}C_{II}$ menée par A aux droites b et c. A un plan quelconque σ du faisceau d'axes SA et coupant a en A_1, correspondent les plans

$$\beta \equiv (BC_{II}A_1), \qquad \gamma \equiv (CA_1B_{II})$$

qui se coupent suivant une droite d de la surface, car α est un plan arbitraire passant par SA. Or, lorsque σ décrit la feuillée SA, les plans β et γ décrivent deux faisceaux de plans

projectifs et la droite d'intersection d des plans homologues engendre l'hyperboloïde (CB_{11}, BC_{11}, a) qui fait partie de la surface. Celle-ci se décompose donc en deux hyperboloïdes (a, b, c), (CB_{11}, BC_{11}, a) et une surface du cinquième ordre admettant un point triple A et quatre points doubles B, C, B_{II}, C_{III}.

3° Prenons S sur la droite BC : le plan ABC fait d'abord partie de la surface. Considérons un plan σ passant par SB et rencontrant a, b, c en A_1, B_1, C_1. Les plans correspondants

$$\alpha \equiv (AB_1C_1), \qquad \beta \equiv (BC_1A_1) \equiv \sigma; \qquad \gamma \equiv (CA_1B_1) \equiv \sigma$$

se coupent suivant une droite B_1C_1 de la surface s'appuyant sur b, c, BC. Cette droite, lorsque σ décrit la feuillée SB, engendre l'hyperboloïde réglé (b, c, BC). Actuellement la surface se décompose en les deux hyperboloïdes (a, b, c), (b, c, BC), le plan ABC et une surface du quatrième ordre possédant deux points doubles A et A_I.

4° Les droites a, b, c et les points S, A étant choisis arbitrairement, prenons B et C sur les sécantes communes $A_{12}C_{12}$ et $A_{13}B_{13}$ menées par S aux couples de droites a, c et a, b. Nous détachons de la surface, indépendamment de l'hyperboloïde (a, b, c), les deux surfaces du second ordre

$$(AB_{13}, BA_{13}, c) \qquad \text{et} \qquad (AC_{12}, CA_{12}, b)$$

qui résultent respectivement des deux faisceaux d'axes SC et SB. Le lieu se décompose donc en trois hyperboloïdes et une surface du troisième ordre ayant deux points doubles B et C. La droite BC ayant en commun, avec elle, quatre points, en fait entièrement partie. On peut d'ailleurs s'assurer que les points de BC correspondent aux plans σ passant par le point d'intersection des droites a et BC.

5° Prenons les trois droites a, b, c dans les faces respectives BSC, CSA, ASB du trièdre SABC. Soient A_{12}, A_{13} les points d'intersection de a avec SB, SC; B_{13}, B_{11} ceux de b avec SC, SA; C_{11}, C_{12} ceux de c avec SA, SB; A', B', C' ceux de a, b, c avec les côtés du triangle ABC.

On observera que les trois faisceaux de plans d'axes SA, SB, SC donnent naissance aux trois surfaces de second ordre

$$(BC_{11},\ CB_{11},\ a), \qquad (CA_{12},\ AC_{12},\ b), \qquad (AB_{13},\ BA_{13},\ c).$$

Le lieu se compose donc de quatre hyperboloïdes et d'un plan; comme les points A, B, C n'appartiennent qu'à deux de ces hyperboloïdes, on peut conclure que ce plan est celui des trois points A, B, C.

Observons encore qu'aux plans σ passant respectivement par A', B', C' corrrespondent respectivement les points de BC, CA, AB. Un plan quelconque $\sigma \equiv (SA_1B_1C_1)$ donne donc naissance à un point S_1 situé dans le plan ABC.

Si l'on remarque que A, B, C sont les points de percée des arêtes du trièdre SABC avec les faces du trièdre $SA_1B_1C_1$ et que semblablement A_1, B_1, C_1 sont les points de percée des arêtes du trièdre $SA_1B_1C_1$ avec les faces du trièdre SABC, on pourra énoncer le théorème suivant de géométrie élémentaire :

Si deux trièdres sont tels que les arêtes de l'un rencontrent les faces de l'autre en trois points dont le plan passe par son sommet, inversement, les arêtes du second rencontrent les faces du premier en trois points dont le plan passe par son sommet (*).

(*) Voir *Mathesis*, 1906, p. 73.

ÉLÉMENTS

D'ANALYTIQUE SPHÉRIQUE

PAR

G. CESÀRO

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

ÉLÉMENTS

D'ANALYTIQUE SPHÉRIQUE

Nous exposons dans cette note la formule qui donne, en un point d'une courbe sphérique, l'angle que la tangente sphérique (arc de grand cercle qui la touche en ce point) fait avec le méridien passant par le même point. On peut, à l'aide de cette formule, traiter sur la sphère toutes les questions que l'on traite en analytique plane : normale à une courbe, rayon du cercle osculateur, développée, etc. Nous nous bornerons à donner la démonstration de la formule fondamentale et quelques applications.

Théorème.

« L'angle α que la tangente sphérique en un point (x, y) de » la courbe $y = f(x)$, y étant la latitude, x la longitude, fait » avec le méridien qui passe en ce point, est donné par

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos y}{y'},$$

» y' étant la valeur de $f'(x)$ au point considéré. »

En effet : l'équation d'un grand cercle quelconque est

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \varphi \sin(x - a), \qquad (1)$$

a et φ étant deux paramètres qui déterminent sa position sur la sphère ; pour avoir l'équation du grand cercle passant (fig. 1) par

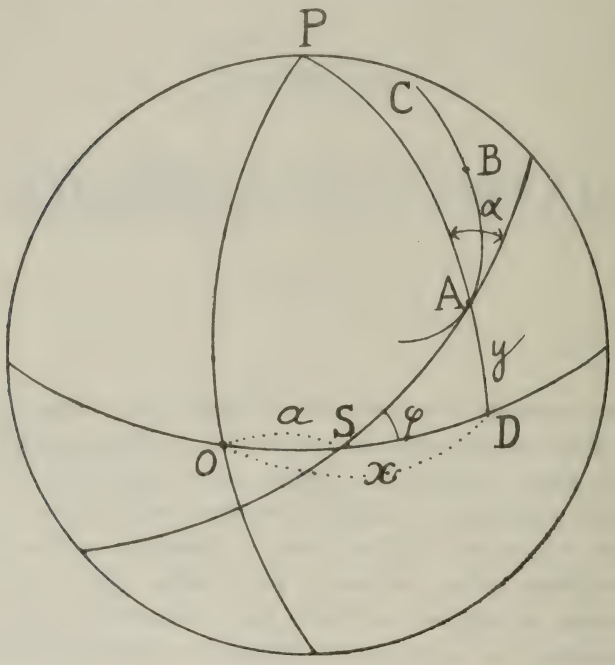


Fig. 1.

le point $A(x, y)$ et un point voisin $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la courbe sphérique ABC, il faudrait joindre à l'équation précédente

$$\operatorname{tg}(y + \Delta y) = \operatorname{tg} \varphi \sin(x + \Delta x - a) \qquad (2)$$

et de ces deux équations tirer φ et a en fonction des coordonnées x, y du point A. Pour obtenir l'équation du grand cercle tangent en A à la courbe sphérique, il faut voir ce que devient le grand cercle passant par A et B lorsque ce second point s'approche du premier et vient coïncider avec lui ; pour cela, après avoir remplacé dans l'ensemble (1) (2) la seconde équation par celle que

l'on obtient en les retranchant membre à membre, divisé les deux membres de l'équation obtenue par Δx et passé à la limite, il vient

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = \operatorname{tg} \varphi \cos (x - a) \text{ (*)}; \qquad (3)$$

l'ensemble (1) (3) donnera l'a et le φ du grand cercle tangent en A à la courbe C en fonction des coordonnées de A. En éliminant φ, il vient

$$\operatorname{tg} (x - a) = \frac{\sin y \cos y}{y'}.$$

Or, le triangle ASD donne

$$\operatorname{tg} (x - a) = \operatorname{tg} \alpha \sin y;$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos y}{y'}.$$

* * *

Équation du grand cercle tangent au point (x, y). — Si X, Y sont les coordonnées courantes, l'équation est

$$\operatorname{tg} Y = \operatorname{tg} \varphi \sin (X - a), \qquad (4)$$

dans laquelle il faut remplacer φ et a par les valeurs tirées de l'ensemble (1) (3). On arrive à effectuer rapidement l'élimination en écrivant (4) sous la forme

$$\operatorname{tg} Y = \operatorname{tg} \varphi \sin (X - x + x - a)$$
$$= \operatorname{tg} \varphi \sin (X - x) \cos (x - a) + \operatorname{tg} \varphi \cos (X - x) \sin (x - a);$$

on obtient

$$\operatorname{tg} Y = \frac{y'}{\cos^2 y} \sin (X - x) + \operatorname{tg} y \cos (X - x).$$

(*) On voit que (3) peut être obtenue en dérivant (1) dans laquelle on suppose φ et a constantes.

* * *

Normale sphérique et sous-normale. — La sous-normale se calcule dans le triangle ADS (fig. 2) :

$$\operatorname{tg} n = \cot \alpha \sin y = y' \operatorname{tg} y. \qquad (5)$$

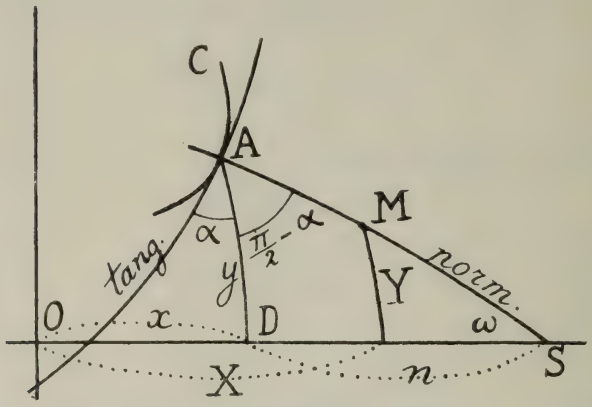


Fig. 2.

L'équation de la normale peut être obtenue en éliminant ω entre les relations

$$\operatorname{tg} Y = \operatorname{tg} \omega \sin (n + x - X),$$
$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \omega \sin n;$$

il vient

$$\frac{\operatorname{tg} Y}{\operatorname{tg} y} = \cos (x - X) + \sin (x - X) \cot n,$$

puis

$$\operatorname{tg} Y = \operatorname{tg} y \cos (X - x) - \frac{1}{y'} \sin (X - x).$$

* * *

Rayon du cercle osculateur. — En menant les normales sphériques au point fixe A (fig. 3) et au point voisin B, lorsque ce

dernier marche vers le premier, le point C, intersection des deux normales, tend vers une position limite qui est le centre du cercle osculateur.

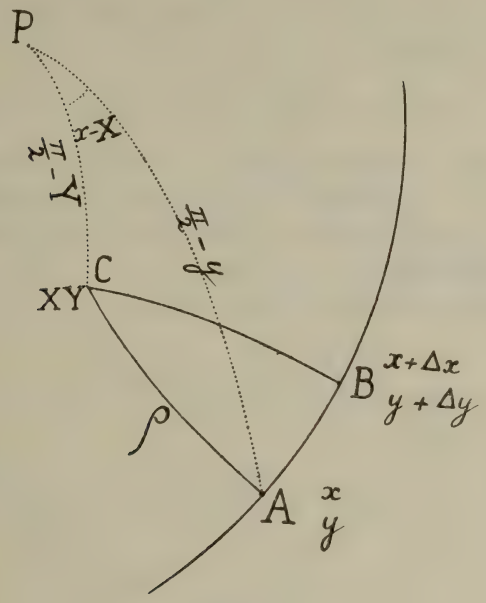


Fig. 3.

L'équation de la normale en A étant

$$\operatorname{tg} Y = \operatorname{tg} y \cos (x - X) + \frac{1}{y'} \sin (x - X), \qquad (6)$$

pour avoir les coordonnées du centre du cercle osculateur, il faudrait écrire l'équation analogue au point $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, résoudre l'ensemble des deux équations par rapport à X et Y, puis voir ce que deviennent ces coordonnées pour $\Delta x = 0$; mais on voit facilement, en raisonnant comme dans l'établissement de la formule fondamentale, que cela revient à résoudre l'ensemble de l'équation (6) et de celle que l'on obtient en la déri-

vant, X et Y étant supposées constantes; cette dernière équation est

$$\operatorname{tg}(x - X) = \frac{y'}{\cos y} \cdot \frac{y'^2 + \cos^2 y}{y'^2 \sin y + y'' \cos y}. \qquad (7)$$

L'équation (7) donnant X, on déduira Y de (6); puis le rayon du cercle osculateur sera donné par

$$\cos \rho = \sin y \sin Y + \cos y \cos Y \cos (x - X). \qquad (8)$$

Mais, pour la facilité du calcul il convient d'éliminer d'abord Y entre (6) et (8), puis de remplacer dans l'équation obtenue $\operatorname{tg}(x - X)$ par la valeur (7). Voici la suite des calculs : nous faisons, pour abréger, $x - X = \omega$.

L'équation (6) étant mise sous la forme

$$\frac{\operatorname{tg} Y}{\cos \omega} = \operatorname{tg} y + \frac{1}{y'} \operatorname{tg} \omega,$$

on aura successivement :

$$\cos \rho = \cos Y \cos \omega \left(\sin y \frac{\operatorname{tg} Y}{\cos \omega} + \cos y\right)$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos y} + \dfrac{\sin y}{y'} \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega + \left(\operatorname{tg} y + \dfrac{1}{y'} \operatorname{tg} \omega\right)^2}};$$

puis

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\cos y \sqrt{y'^2 + \cos^2 y}}{\sin y \cos y + y' \cot \omega},$$

et enfin

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{(y'^2 + \cos^2 y)^{\frac{3}{2}}}{y'' \cos y + 2y'^2 \sin y + \sin y \cos^2 y}. \qquad (9)$$

* * *

Ellipse sphérique; son équation; propriété de la normale. — Nous appelons ellipse sphérique « *le lieu des points de la*

» *sphère tels que la somme de leurs distances sphériques à deux* » *points fixes* **F**, **F'** *de cette surface* (fig. 4) *est une quantité* » *constante* 2a ».

Prenons pour équateur le grand cercle FF′ et pour origine le

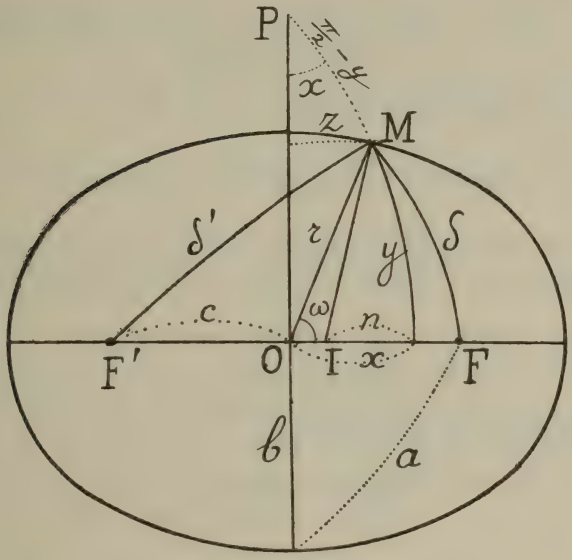


Fig. 4.

point O, milieu de FF′. L'équation polaire s'obtient immédiatement en opérant comme il suit : de

$$\cos\delta = \cos r \cos c + \sin r \sin c \cos\omega,$$
$$\cos\delta' = \cos r \cos c - \sin r \sin c \cos\omega,$$

on tire, par addition et soustraction,

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\delta' + \delta}{2}\cos\frac{\delta' - \delta}{2} &= \cos r \cos c \\ \sin\frac{\delta' + \delta}{2}\sin\frac{\delta' - \delta}{2} &= \sin r \sin c \cos\omega ; \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

en éliminant $\frac{\delta' - \delta}{2}$ entre ces deux équations, on obtient l'équation polaire :

$$\frac{\cos^2 r \cos^2 c}{\cos^2 a} + \frac{\sin^2 r \sin^2 c \cos^2 \omega}{\sin^2 a} = 1.$$

En désignant par b le demi petit axe de la courbe, donné par

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

l'équation polaire peut s'écrire

$$\sin^2 r \cos^2 \omega \cdot \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a} = \sin^2 r \sin^2 b.$$

Si l'on prend d'abord comme coordonnées la latitude y et la perpendiculaire z menée de M sur le méridien principal, on a

$$\sin y = \sin r \sin \omega, \quad \sin z = \sin r \cos \omega$$
$$\sin^2 r = \sin^2 y + \sin^2 z,$$

et l'équation de la courbe devient

$$\frac{\sin^2 z}{\sin^2 a} + \frac{\sin^2 y}{\sin^2 b} = 1.$$

Pour avoir l'équation en fonction de la latitude et de la longitude, il suffit de remplacer dans la dernière équation z en fonction de x et y :

$$\sin z = \cos y \sin x;$$

on obtient

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a} \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 x}. \qquad (11)$$

Valeurs de δ et δ' en fonction de x. — Des équations (10) on déduit

$$\operatorname{tg} \frac{\delta' - \delta}{2} \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \operatorname{tg} r \cos \omega,$$

ou

$$\operatorname{tg} (\delta' - a) = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} \operatorname{tg} x,$$

ou enfin

$$\delta' = a + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}\operatorname{tg} x\right)$$

$$\delta = a - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a}\operatorname{tg} x\right).$$

Sous-normale. — On tire de l'équation (11)

$$y' = -\frac{\sin a \sin b \cos b \sin x \cos x}{(\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 x)\sqrt{\sin^2 a - \sin^2 x}};$$

la valeur absolue de la sous-normale est donc donnée par

$$\operatorname{tg} n = y' \operatorname{tg} y = \frac{\sin^2 b \sin x \cos x}{\sin^2 a - \sin^2 b \sin^2 x}. \qquad (12)$$

THÉORÈME. *La normale menée en un point de l'ellipse sphérique bissèque l'angle que forment les rayons vecteurs issus de ce point.*

Pour démontrer la propriété, nous ferons voir que la bissectrice et la normale rencontrent FF′ au même point : soient d'abord s et s' les segments déterminés sur FF′ par la bissectrice de l'angle FMF′ : on a

$$\frac{\sin s}{\sin s'} = \frac{\sin \delta}{\sin \delta'},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{s' - s}{2}}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\delta - \delta'}{2}}{\operatorname{tg} a};$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{s' - s}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 c}{\operatorname{tg}^2 a}\operatorname{tg} x.$$

D'autre côté, si MI est la normale et l, l' les segments qu'elle détermine sur FF′, on a

$$l' = c + x - n, \quad l = c - x + n,$$

$$\operatorname{tg}\frac{l' - l}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} n}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} n},$$

ou, d'après (12)

$$\operatorname{tg}\frac{l'-l}{2} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos^2 b - \cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\operatorname{tg}^2 c}{\operatorname{tg}^2 a} \operatorname{tg} x. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

* * *

Propriété de la tangente à la transformée d'une courbe sphérique dans la carte de Mercator. — On sait que dans la carte de Mercator les axes étant deux droites rectangulaires représentant l'équateur (x) et le méridien principal (y), un point de la sphère qui a pour longitude x et pour latitude λ est représenté par un point ayant pour coordonnées

$$x \text{ et } \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\cos \lambda}.$$

L'équation de la courbe sphérique étant

$$\lambda = f(x),$$

celle de la transformée Mercator sera

$$y = \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\cos \lambda} \text{ (*)}.$$

Si l'on désigne par i l'angle que la tangente, en un point de la transformée, fait avec la direction des ordonnées, on a, d'après l'équation ci-dessus,

$$\operatorname{tg} i = \frac{1}{y'} = \frac{\cos \lambda}{\lambda'};$$

mais l'angle α que fait sur la sphère la tangente sphérique au point correspondant avec le méridien est aussi donné par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \lambda}{\lambda'}.$$

(*) L'équation de la transformée est donc

$$y = l \frac{1 + \sin \lambda}{\cos \lambda}.$$

Donc : la tangente en un point de la transformée Mercator fait avec la direction de l'ordonnée le même angle que sur la sphère la tangente sphérique au point correspondant de la courbe considérée fait avec le méridien.

* * *

Seconde démonstration de la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos y}{y'}.$$

On suppose tracé l'arc de grand cercle AB (fig. 5) et l'on désigne par α_1 l'angle variable qui deviendra α lorsque B atteindra A.

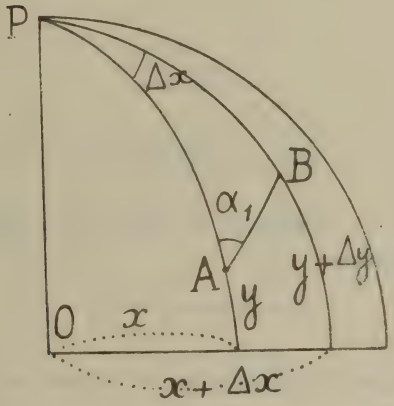


Fig. 5.

Entre les quatre éléments PB, PA, Δx et α_1 se passe la relation

$$\operatorname{tg}(y + \Delta y) \cos y = \sin y \cos \Delta x + \sin \Delta x \cot \alpha_1,$$

qui se transforme successivement en

$$\operatorname{tg}(y + \Delta y) - \operatorname{tg} y + 2 \operatorname{tg} y \sin^2 \frac{\Delta x}{2} = \sin \Delta x \frac{\cot \alpha_1}{\cos y},$$

$$\frac{\Delta x}{\sin \Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\operatorname{tg}(y + \Delta y) - \operatorname{tg} y}{\Delta y} + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{2} = \frac{\cot \alpha_1}{\cos y}.$$

Puis, en passant à la limite,

$$y' \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cot \alpha}{\cos y},$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos y}{y'}.$$

* * *

Différentielle de l'arc. — La valeur de ds se déduit immédiatement de celle de α. On a (fig. 5)

$$\frac{\sin \Delta s}{\sin \Delta x} = \frac{\cos (y + \Delta y)}{\sin \alpha_1},$$

et à la limite,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\cos y}{\sin \alpha};$$

d'où

$$ds = dx \sqrt{\cos^2 y + y'^2}. \qquad (13)$$

Application. — Longueur de l'arc de la courbe sphérique ayant pour équation

$$y = \operatorname{arc\,sin} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

C'est une spirale sphérique (fig. 6) partant de l'origine, montant sur la sphère tout en tournant autour du pôle, dont elle s'approche rapidement (*), mais qu'elle n'atteint qu'à l'infini.

On a

$$y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \cos y;$$

on en déduit

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,$$

(*) La figure n'est que schématique : la courbe s'approche bien plus rapidement du pôle, comme l'indiquent les latitudes des points A, B, C, D inscrites plus loin.

c'est-à-dire qu'en un point quelconque la tangente sphérique fait un angle de 45° avec le méridien (*). D'après (13), on a

$$ds = 2\sqrt{2}\,\frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

on en déduit

$$s_0^x = 2\sqrt{2}\,(\text{arc tg}\, e^x)_0^x = \sqrt{2}\left(2\,\text{arc tg}\, e^x - \frac{\pi}{2}\right);$$

la longueur totale (**) de la courbe sera donc

$$s_0^\infty = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2{,}22144.$$

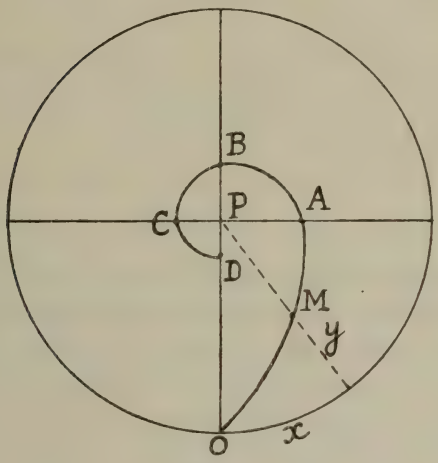


Fig. 6.

Comme

$$e^x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right),$$

on peut aussi écrire

$$s_0^x = y\sqrt{2},$$

c'est-à-dire que « la longueur d'un arc OM compté à partir de

(*) Sur la carte de Mercator, cette courbe se transforme donc en la bissectrice de l'angle des axes coordonnés.

(**) Bien entendu : de la partie qui se trouve dans l'hémisphère supérieur.

l'origine égale la latitude de l'extrémité de cet arc multipliée par $\sqrt{2}$ » ou encore : « la longueur d'un arc quelconque égale le produit par $\sqrt{2}$ de la différence des latitudes de ses extrémités ». La dernière formule permet de calculer facilement les longueurs des arcs tels que OA, OAB, OABC, etc. :

	x	y	s_0^x
A	90°	66°30′48″	1,64173
B	180°	85° 3′ 4″	2,09929
C	270°	88°58′14″	2,19603
D	360°	89°47′10″	2,21616

Comme la longueur totale de la courbe est 2,22144, on voit que l'infinité des spires qui restent à parcourir depuis le point D jusqu'au pôle a pour longueur 0,00528.

* * *

Des formules sphériques on peut déduire celles de l'analytique plane. Les formules précédentes ont été obtenues en supposant le rayon de la sphère égal à l'unité; si ce rayon était R, pour écrire les relations trigonométriques relatives à un triangle de cette sphère, il faudrait joindre ses sommets au centre et considérer le triangle ayant pour sommets les points d'intersection de ces rayons avec la sphère de rayon 1; ce triangle, auquel s'appliquent les relations habituelles de la trigonométrie, aura mêmes angles que le premier, mais ses côtés seront ceux du premier divisés par R. Il suffira de supposer R infini dans les formules ainsi obtenues pour arriver aux formules relatives aux courbes planes.

Ainsi : l'équation du grand cercle faisant l'angle φ avec l'équateur (fig. 1) et ayant a pour longitude à l'origine, devient, sur la sphère de rayon R,

$$\operatorname{tg}\frac{y}{R} = \sin\left(\frac{x-a}{R}\right)\operatorname{tg}\varphi;$$

pour $R = \infty$, en écrivant

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{y}{R}}{\sin \frac{x - a}{R}} = \operatorname{tg} \varphi,$$

et, en observant que le rapport des tangentes ou des sinus de deux arcs infiniment petits du même ordre a même limite que le rapport de ces arcs, on obtient

$$\frac{y}{x - a} = \operatorname{tg} \varphi,$$

ou

$$y = \operatorname{tg} \varphi (x - a).$$

Prenons, comme deuxième exemple, la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos y}{y'}$$

et précisons davantage la suite des opérations : considérons la courbe plane $y = f(x)$ et un point M de celle-ci ; sur une sphère de rayon R construisons un point ayant pour longueurs de sa longitude et de sa latitude respectivement l'x et l'y du point M ; la même opération étant répétée pour une suite de points, nous obtenons sur la sphère une courbe ayant même équation que la ligne plane. La même construction étant effectuée sur des sphères de rayon de plus en plus grand, nous obtenons une série de courbes ayant même équation, même y', même y'', etc. Si nous cherchons l'angle α que la tangente sphérique au point (x, y) de la courbe (sphère R) fait avec le méridien, nous obtenons, en opérant comme il l'a été dit page 4,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \frac{y}{R}}{y'};$$

au point correspondant de la sphère de rayon R_1, on aurait de même

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\cos \frac{y}{R_1}}{y'},$$

et ainsi de suite; comme y et y' restent constantes, on voit qu'à mesure que R augmente, l'angle α va en augmentant et que lorsque R dépasse toute limite, cet angle tend vers la valeur donnée par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{y'}.$$

Sous-normale. — Sur la sphère de rayon R, la formule (5) devient

$$\operatorname{tg} \frac{n}{R} = y' \operatorname{tg} \frac{y}{R},$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{n}{R}}{\operatorname{tg} \frac{y}{R}} = y',$$

et, pour $R = \infty$,

$$n = yy'.$$

Rayon du cercle osculateur. — Au premier abord la formule (9) pourrait paraître inexacte, parce que si l'on y fait $R = \infty$, après y avoir remplacé ρ par $\frac{\rho}{R}$ et y par $\frac{y}{R}$, le second membre devient $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ tandis que le premier membre s'annule. Si l'on reprend le calcul de ρ, dans le cas où le rayon de la sphère est R, l'équation (6) devenant

$$\operatorname{tg} \frac{Y}{R} = \operatorname{tg} \frac{y}{R} \cos \frac{x - X}{R} + \frac{1}{y'} \sin \frac{x - X}{R},$$

on obtient pour l'équation dérivée

$$\operatorname{tg} \frac{x - X}{R} = \frac{y'}{\cos \frac{y}{R}} \cdot \frac{y'^2 + \cos^2 \frac{y}{R}}{y'^2 \sin \frac{y}{R} + R y'' \cos \frac{y}{R}},$$

équation qui diffère de (7) non seulement par le remplacement *des arcs tels que* x *par* $\frac{x}{R}$, *mais aussi par le fait que* y'' *est*

remplacée par Ry''; la troisième équation devant servir à l'élimination de X et Y devenant ici

$$\cos\frac{\rho}{R} = \sin\frac{y}{R}\sin\frac{Y}{R} + \cos\frac{y}{R}\cos\frac{Y}{R}\cos\frac{x-X}{R},$$

on voit que, pour avoir l'expression de ρ pour une courbe tracée sur une sphère de rayon R, il suffit d'effectuer dans la formule (9) les changements écrits ci-dessus en italique. On obtient

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{R} = \frac{\left(y'^2 + \cos^2\frac{y}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}{Ry''\cos\frac{y}{R} + 2y'^2\sin\frac{y}{R} + \sin\frac{y}{R}\cos^2\frac{y}{R}}.$$

En écrivant cette relation sous la forme

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\rho}{R}}{\operatorname{tg}\frac{y}{R}} = \frac{\left(y'^2 + \cos^2\frac{y}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}{Ry''\sin\frac{y}{R} + 2y'^2\sin\frac{y}{R}\operatorname{tg}\frac{y}{R} + \sin^2\frac{y}{R}\cos\frac{y}{R}},$$

en y faisant $R = \infty$, et en observant que pour cette valeur de R

$$R\sin\frac{y}{R} = y,$$

on obtient la formule habituelle

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

* * *

Observation sur l'homogénéité des formules contenant des dérivées. — Lorsqu'on cherche à vérifier si une formule est homogène, il faut tenir compte du degré des différentes dérivées qu'elle renferme. Dans la ligne $y = f(x)$, dans laquelle x et y

expriment des longueurs, y' est le rapport entre deux longueurs, c'est-à-dire un nombre, donc une quantité de degré 0. Au contraire, dans la ligne $y' = f'(x)$, les abscisses représentent des longueurs tandis que les ordonnées expriment des nombres; de sorte que y'' est le rapport d'un nombre à une longueur, c'est-à-dire une quantité du degré — 1. On verrait de même que y''' est du degré — 2, et qu'en général la dérivée $n^{\text{ième}}$ est une quantité du degré — $(n - 1)$.

Ainsi, dans la relation

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

qui donne le rayon de courbure d'une courbe plane, le numérateur étant du degré 0 et le dénominateur du degré — 1, le quotient sera du degré 1; ce qui doit être. De même, dans la formule sphérique analogue

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{R} = \frac{\left(y'^2 + \cos^2\frac{y}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}{Ry''\cos\frac{y}{R} + 2y'^2\sin\frac{y}{R} + \sin\frac{y}{R}\cos^2\frac{y}{R}},$$

la présence de R comme multiplicateur de y'' rend le dénominateur homogène en rendant Ry'' du degré 0; le second membre est donc le quotient de deux nombres, c'est-à-dire du degré 0; ce qui doit être.

SUR

UNE POUDRE BRUNE A ASPECT GRAS

A ODEUR DE PÉTROLE

PROVENANT

DU CHARBONNAGE DE LA HAYE

ÉTUDE OPTIQUE

DE

QUELQUES PHOLÉRITES BELGES

PAR

Arthur ABRAHAM

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

SUR

UNE POUDRE BRUNE A ASPECT GRAS

A ODEUR DE PÉTROLE

PROVENANT

DU CHARBONNAGE DE LA HAYE

ÉTUDE OPTIQUE

DE QUELQUES PHOLÉRITES BELGES

A la séance de la Société géologique de Belgique du 15 novembre 1903, M. le Prof[r] Lohest communiquait une note sur la présence d'un hydrocarbure dans le terrain houiller belge. Il s'agissait d'une poudre brune à aspect gras, renfermée dans une géode de sidérose magnésifère provenant du charbonnage de La Haye.

M. le Prof[r] Cesàro a trouvé que cette substance était constituée de lamelles de pholérite bien développées, englobées dans une matière organique brune à odeur de pétrole.

Le présent travail a eu pour but de déterminer la proportion de matière organique contenue dans la pholérite noire; par la

même occasion, nous indiquons les observations microscopiques faites sur quelques pholérites belges.

* * *

Détermination de la proportion de matière organique.

Une partie de la matière organique étant volatile sous l'action de la chaleur, pour pouvoir en faire le dosage par perte de poids, il fallait d'abord s'assurer si l'eau de la pholérite ne se dégage pas en même temps que ces matières organiques volatiles.

A cet effet, 1gr148 de pholérite blanche ordinaire, préalablement desséchée sur l'acide sulfurique concentré, ont été soumis dans une étuve à une température augmentant progressivement pour atteindre un maximum de 280°. A cette température, il n'y a aucune perte de poids. En continuant à chauffer au rouge naissant, on constate une perte de poids de 0gr1439, ce qui correspond à 12.55 %. Portée au rouge vif, le poids reste constant. *La pholérite contient donc 12.55 % d'eau qui se dégage à une température supérieure à 280°* (*).

En opérant de la même façon avec la pholérite imprégnée de matière organique, on constate qu'en chauffant jusqu'à 90° il n'y a aucune perte de poids. Mais, à partir de cette température, il distille un liquide visqueux qui, clair au début de la distillation, se fonce en couleur au fur et à mesure que la température augmente. A 280°, toute distillation est terminée et 1gr197 de matière expérimentée accusent une perte de poids de 0gr1057, ce qui correspond à *8.15 % de matière organique volatile.*

En continuant à chauffer au rouge naissant jusqu'à poids constant, le résidu organique brûle pour laisser un résidu blanc de pholérite. A ce moment il y a une perte de poids totale de 0gr3396, c'est-à-dire 25.98 % représentant la totalité d'eau et de matières organiques.

(*) Dana indique, pour des pholérites belges, de 13.85 à 14 49 % d'eau.

La composition de la poudre brune du charbonnage de La Haye est donc la suivante :

Matières organiques volatiles.	8.15
Matières organiques fixes	5.28
Pholérite	86.57
	100.00

* * *

Examen au microscope de différentes pholérites belges.

On peut les grouper en deux classes :

a) Celles qui paraissent franchement mais faiblement biréfringentes ;

b) Celles qui paraissent presque isotropes.

1. *Pholérite noire du charbonnage de La Haye.* — Petites lamelles hexagonales, parallèles à un clivage, dont les angles ont exactement 120°. Elles sont allongées suivant la direction de deux côtés parallèles. Les dimensions des plus grandes sont de 1 centième de millimètre en largeur pour environ 2 centièmes en longueur.

Ici nous rencontrons les deux types signalés plus haut : des lamelles faiblement mais nettement biréfringentes à côté d'autres presque isotropes.

a) *Lamelles faiblement mais nettement biréfringentes.* — Présentent une teinte de polarisation très basse, à peine du gris clair de 1er ordre. Pour cette raison, la mesure des angles d'extinction ne peut se faire qu'approximativement. Pour la même raison la détermination du signe de ces lames ne peut se faire au moyen du mica quart d'onde, mais on y parvient au moyen d'une lame de gypse teinte sensible. On détermine en même temps les directions d'extinction. La lame de gypse étant introduite dans le microscope avec les axes de son ellipse à 45° des sections des nicols, on fait tourner la platine jusqu'à ce que la lamelle de pholérite donne le rouge à son maximum d'inten-

sité. A ce moment on sait que les axes de son ellipse de section sont à 45° des sections principales des nicols, et l'on constate que dans cette position l'allongement de la lamelle est à 38° ou 39° (fig. 1) du fil du réticule parallèle à la section principale

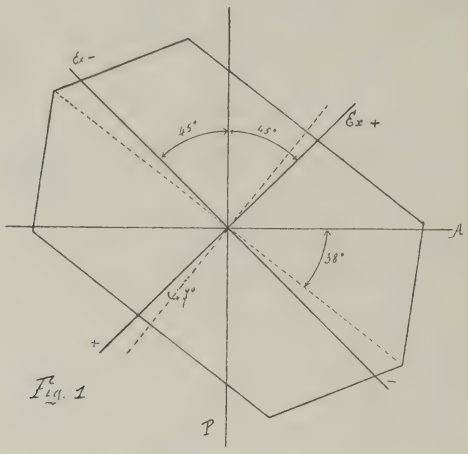


Fig. 1

de l'analyseur. On en déduit que le grand axe de l'ellipse de section fait 6° à 7° avec la normale à l'allongement (fig. 1).

La biréfringence de ces lamelles ne peut être évaluée qu'approximativement, parce que l'épaisseur, étant très faible, est très difficile à apprécier exactement. Après un très grand nombre de mesures sur différentes lamelles donnant sensiblement le même retard, j'ai trouvé une épaisseur moyenne de 1 centième de millimètre, et pour la biréfringence, *6* approximativement.

b) *Lamelles presque isotropes.* — Elles présentent entre nicols croisés en lumière parallèle une teinte sombre uniforme. En lumière convergente, elles ne donnent aucune figure d'interférence. Elles paraissent donc isotropes.

Mais si l'on introduit dans le microscope, comme en *a*), la lame de gypse teinte sensible et si l'on fait tourner la platine, on voit les lamelles cristallines prendre des teintes tantôt rougeâtres, tantôt indigo, suivant la position qu'elles occupent. Il en résulte que ces lamelles sont très faiblement biréfringentes.

Comme par addition elles font monter la teinte du gypse *presque* au bleu, et que par soustraction elles la font descendre *à peu près* au rouge, on en conclut que leur retard est de 3 à 4. L'emploi de la lame teinte sensible a permis de trouver que ces lamelles ont exactement la même orientation optique que celles décrites en *a*).

Remarquons ici que la biréfringence 6 que nous avons trouvée est celle des lames hexagonales de clivage.

Pour observer des lamelles vues sur leur tranche, j'ai disséminé dans du baume de Canada semi-liquide, entre porte-objet et couvre-objet, des lamelles de pholérite qui se sont montrées dans diverses positions. On choisit celles qui représentent une section transversale au clivage : elles sont rectangulaires et présentent les traces du clivage parallèlement à l'allongement. Leur teinte de polarisation est plus haute que celle des lamelles hexagonales. Elles atteignent le gris clair de 1er ordre et s'éteignent exactement suivant l'allongement. Le mica quart d'onde, par soustraction, les éteint complètement; par addition, il les fait monter au jaune. Ici donc son emploi est possible et permet la détermination du signe de la lame. Le grand axe de l'ellipse de section est dirigé suivant l'allongement et, par conséquent, suivant les traces du clivage. Le retard est donc de 14.

La biréfringence de ces lamelles transversales ne s'estimera qu'approximativement, car l'épaisseur est aussi difficile à apprécier. Cette épaisseur varie entre 1 et 1 $^1/_2$ cent. de millimètre. Si nous prenons la plus faible épaisseur, nous obtenons, pour la plus grande valeur de la biréfringence, 14.

2. *Pholérite de Fooz.* — Est semblable à la précédente à tous les points de vue : forme, dimensions, biréfringence et orientation optique.

3. *Pholérite de Rieux du Cœur, à Quaregnon.* — Est identique aux précédentes.

4. *Pholérite du Grand-Hornu.* — Constitue une couche très compacte d'environ un centimètre d'épaisseur, comprise entre

deux couches de houille. Elle se présente en lamelles hexagonales dont la forme et l'orientation optique sont les mêmes que dans les pholérites précédentes. Les dimensions sont réduites approximativement de moitié et la biréfringence est moins forte que celle décrite en *a*.

5. *Pholérite de Marcinelle.* — Est identique à celle du Grand-Hornu.

6. *Pholérite de la houillère Henri-Guillaume, à Seraing.* — Se présente en belles grandes lamelles de même forme et de même orientation optique que les précédentes. Les lamelles sont au moins doubles de celles du charbonnage de La Haye et sont *presque isotropes*. La biréfringence des sections *transversales* est sensiblement moindre que celle de toutes les précédentes.

7. *Pholérite de la houillère du Perron, à Ougrée.* — Identique à la précédente.

8. *Pholérite du Casino du Beau-Mur, à Liége.* — Avec des dimensions un peu moindres, elle se présente comme les deux précédentes.

9. *Pholérite de la houillère Bois l'Evêque, à Liége.* — Avec des dimensions sensiblement les mêmes que celles du 1°, les lamelles sont presque isotropes. Les sections transversales sont très peu biréfringentes.

10. *Pholérite de la houillère Saint-Gilles, à Liége.* — Se présente en très petits cristaux assez mal définis, détachés d'une couche compacte. Quelques rares lamelles hexagonales se montrent avec une apparence plus isotrope encore que toutes les précédentes.

Système cristallin. — Rien ne s'oppose à ce que l'on range ces différentes pholérites belges dans le *système clinorhombique* en s'appuyant sur les considérations suivantes :

a) Les lamelles hexagonales de clivage prennent la notation g^1 et sont limitées périphériquement par les faces h^1, p, a^1.

b) Certaines de ces lamelles présentent, à droite et à gauche de leur direction d'allongement, une face modifiant l'arête d'intersection des faces h^1 et g^1. A cette face modifiante, nous pouvons donner la notation m (fig. 2).

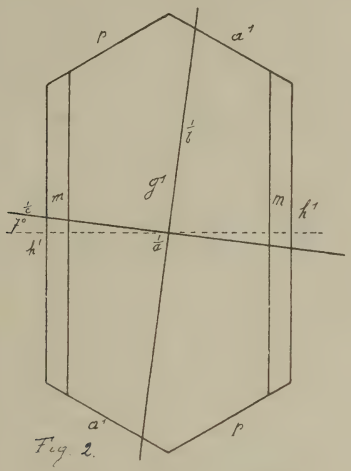


Fig. 2.

c) Les sections g^1 s'éteignent obliquement à leur direction d'allongement : le grand axe de l'ellipse de section faisant 6° à 7° avec une normale à h^1.

d) Les faces de la zone h^1 p a^1 s'éteignent suivant les traces du clivage g^1, dont la direction est positive.

e) De ce que, dans la section g^1, le grand axe de l'ellipse fait 6° à 7° avec la normale à h^1 et que les sections transversales ont leur direction d'extinction positive dirigée suivant la trace du clivage, on peut conclure que le plan des axes optiques est perpendiculaire à g^1 et fait 6° à 7° avec une normale à h^1, et que la bissectrice négative est normale au clivage.

Mars 1908.

LA

PHOLÉRITE

PAR

G. CESÀRO

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

LA PHOLÉRITE

A l'occasion de la note de M. Abraham sur les pholérites belges, je crois utile de comparer entre elles les propriétés attribuées par les différents auteurs à cette espèce minérale.

*
* *

MM. *Michel Lévy* et *Lacroix* (*) rapportent dubitativement la pholérite au système anorthique. *La direction d'extinction positive de la base* (hexagone de clivage) *fait un angle de* 12° *avec la normale à deux côtés opposés.* La bissectrice négative est voisine de la normale à la base; l'angle axial est assez grand. La biréfringence B serait analogue à celle des micas, c'est-à-dire d'environ 42.

En supposant V compris entre 30° et 45°, la biréfringence X d'une face normale à la bissectrice, donnée par

$$X = B \sin^2 V,$$

serait comprise entre $\frac{B}{4}$ et $\frac{B}{2}$, c'est-à-dire entre 10 et 20; la biréfringence de la base serait peu différente des nombres ci-dessus et il suffirait que les lamelles aient une épaisseur d'environ $1/2$ centième de millimètre pour présenter le retard 6 observé par M. Abraham.

(*) *Les minéraux des roches,* p. 253.

* * *

Dana prend, avec M. *Miers* (*), l'hexagone de clivage comme base d'un prisme clinorhombique; la normale à cette base fait environ 7° avec la verticale. La bissectrice obtuse n_g est dirigée (fig. 1) suivant l'axe binaire et la bissectrice aiguë n_p fait

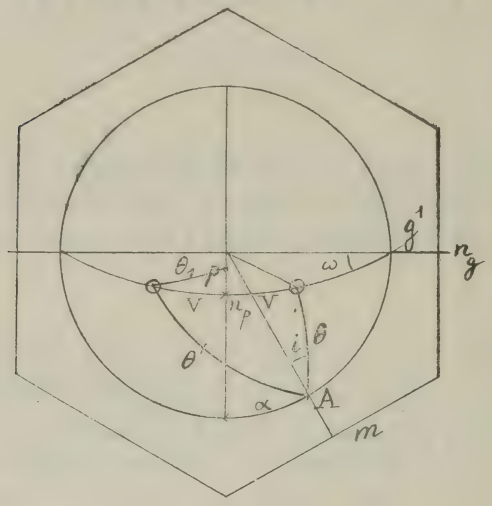


Fig. 1.

environ 20° avec la normale à la base (**). L'angle axial est d'environ 90°. Il suit de ce qui précède que *les lamelles de clivage s'éteindront suivant la normale à deux côtés opposés de l'hexagone.*

La biréfringence de la base sera donnée par

$$X_p = B \sin^2 \theta_1 = B(1 - \cos^2 V \cos^2 20^\circ);$$

et, pour $V = 45^\circ$,

$$X_p = 0{,}5585.B.$$

(*) *Descriptive Mineralogy*. Sixth edition, p. 685. — M. Miers a eu à sa disposition des cristaux très nets, qui lui ont permis de déterminer les dimensions du prisme primitif.

(**) Dana n'indique pas le sens dans lequel cet angle doit être compté.

Si donc on admettait, comme pour les micas, B = 42, il viendrait

$$X_p = 23,5$$

et il faudrait des lamelles épaisses de $^1/_4$ de centième de millimètre pour obtenir le retard 6. Les biréfringences des faces verticales sont respectivement

$$X_{g^1} = B \cos^2 V = \frac{B}{2},$$

$$X_m = B \sin \theta \sin \theta' = 0,7731.B$$

ou $0,8505.B$,

suivant que la bissectrice s'incline vers le spectateur ou vers l'arrière ; de toute manière on voit que dans les pholérites de M. Miers on rencontrera dans la zone verticale des faces *moins biréfringentes que la base*, d'autres plus biréfringentes que la base : les premières, qui sont les faces g^1, auront une biréfringence qui sera d'environ les neuf dixièmes de celle de la base ; les secondes, qui sont les faces m, seront environ une fois et demie plus biréfringentes que la base.

Dans les pholérites belges, M. Abraham n'a trouvé, dans la zone verticale, que des faces beaucoup plus biréfringentes que la base.

Angle d'extinction des faces de la zone verticale. — Si α est l'angle qu'une face verticale A fait avec h^1, l'angle d'extinction x, compté à partir de la verticale, sera donné par

$$x = \frac{A}{2} - i,$$

formule dans laquelle A est l'angle que font entre eux les grands cercles qui joignent le pôle de la face considérée aux pôles des axes optiques. Comme $2V = 90°$, on a

$$\cos A = \cot \theta \cot \theta',$$

$$\cos i = \frac{\cos \omega}{\sin \theta \sqrt{2}},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha \sin\omega),$$

$$\cos\theta'_e = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha - \cos\alpha \sin\omega).$$

L'angle ω est de 27° dans le cas où la bissectrice est inclinée vers le spectateur et de 13° lorsqu'elle est inclinée en arrière (*). En donnant à α différentes valeurs, on obtient les angles d'extinction demandés :

	x	
α	$\omega = 27°$	$\omega = 13°$
—	—	—
0°	0°	0°
30°	7°35′	3°42′
60°	19°7′	9°3′
90°	27°	13°

Il s'ensuit que les faces *m* des pholérites étudiées par M. Miers s'éteindront à 7°35′ ou à 3°42′ de la verticale suivant le sens d'inclinaison de la bissectrice, tandis que les faces g^1 s'éteindront, dans les cas analogues, à 27° ou à 13°.

Dans aucun cas l'angle d'extinction sera nul, la face h^1 n'existant pas dans les cristaux.

Dans les pholérites belges, d'après M. Abraham, *l'angle d'extinction serait nul dans toutes les faces de la zone verticale;* mais on peut observer que, dans les conditions où il a opéré, un angle de 3°42′ peut passer inaperçu.

* * *

Pholérites belges. — D'après ce qui vient d'être dit, M. Abraham a été amené à considérer l'axe de la zone verticale comme un L^2 et à dire que les lamelles de pholérite étudiées sont

(*) Dans ce cas, il suffit de laisser la figure telle qu'elle est, en plaçant le pôle *p* en arrière.

clinorhombiques, mais ont pour plan de symétrie le clivage, qui est la base de la pholérite de M. Miers.

La figure 2 montre l'orientation adoptée : on a pris pour h^1 la

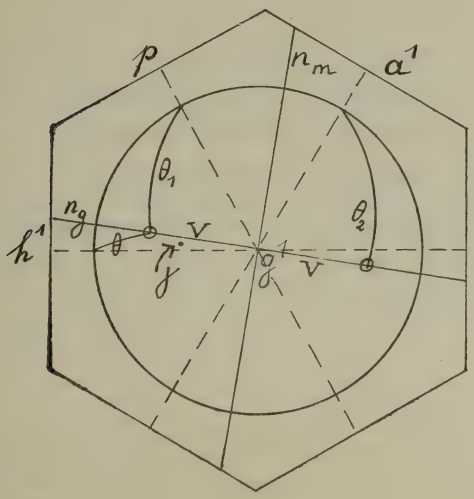


Fig. 2.

face dont la normale fait 7° avec la bissectrice positive n_g, celle-ci rencontrant la face 100 vers le haut ; les autres faces de l'ancienne zone verticale sont notées $p = 001$ et $a^1 = \bar{1}01$.

Nous venons de dire que la rectitude des extinctions des faces normales au clivage n'est pas tout à fait probante ; d'autres observations plus nombreuses et plus précises nous semblent nécessaires ; mais ce qui éloigne les pholérites belges de celles décrites par M. Miers est l'obliquité d'extinction du clivage, obliquité qui paraît nettement établie dans les premières.

Biréfringence. — En ce qui concerne la biréfringence, qui dans les pholérites belges paraît inférieure à celle des micas, les lamelles sont trop minces et les mesures trop peu précises, pour qu'on puisse déduire de celles-ci une valeur, même approximative, de la biréfringence. Cependant, on peut, de la position des axes d'élasticité donnée par M. Abraham, déduire quelques

relations qui doivent exister entre les biréfringences des différentes faces de son cristal de pholérite, relations qu'il serait nécessaire de vérifier expérimentalement :

On a

$$X_{g^1} = B \sin^2 V,$$
$$X_{h^1} = B(1 - \sin^2 V \cos^2 \gamma),$$
$$X_p = B\{1 - \sin^2 V \cos^2(60° - \gamma)\},$$
$$X_{a^1} = B\{1 - \sin^2 V \cos^2(60 + \gamma)\},$$

formules dans lesquelles $\gamma = 7°$. On en déduit :

1° Rien que par le fait que la bissectrice normale au clivage est la bissectrice aiguë, la biréfringence de la face h^1 sera plus grande que celle du clivage g^1. En effet, on a

$$\frac{X_{h^1}}{X_{g^1}} = \cot^2 V + \sin^2 \gamma;$$

or, si $V < 45°$, le second membre (*) est plus grand que l'unité.

Cette propriété est d'accord avec les observations de M. Abraham, mais il est probable que le rapport obtenu pour les deux biréfringences est trop grand, car $\frac{X_{h^1}}{X_{g^1}} = \frac{7}{3}$ exigerait $V = 30°18'$, ce qui ne paraît pas d'accord avec l'apparence optique du clivage en lumière convergente.

2° Dans la zone normale au clivage, il doit exister des faces à biréfringences nettement différentes. En effet, on a :

$$X_p - X_{h^1} = X_{g^1} \sin 60° \sin 46° = 0{,}62297.X_{g^1},$$
$$X_{a^1} - X_{h^1} = X_{g^1} \sin 60° \sin 74° = 0{,}85248.X_{g^1};$$

on en déduit que

$$X_{h^1} < X_p < X_{a^1}.$$

Si, pour fixer les idées, on admet le nombre $X_{g^1} = 6$ obtenu par M. Abraham, les biréfringences de p et de a^1 dépasseront celle de h^1 respectivement de 3,7 et de 5.

(*) Ceci aura lieu même pour 2V obtus, tant que $\text{tg } V < \frac{1}{\cos 7°}$; pour $V = 45°13'$, les deux biréfringences deviennent égales.

Ce fait doit être observable, d'autant plus que l'épaisseur qui donne ici le retard est la largeur de l'hexagone de clivage, largeur qui est certainement de beaucoup supérieure à l'épaisseur de la lamelle.

* * *

Conclusion. — Les pholérites étudiées par M. Miers diffèrent nettement des autres par la rectitude des extinctions du clivage.

Quant aux pholérites de Reusch (*) et celles étudiées par M. Abraham, elles pourraient bien ne représenter qu'un même type, avec de légères divergences, caractérisé par l'obliquité des extinctions du clivage. Il est vrai que Reusch dit que les *sections transversales* s'éteignent à 20° de la trace du clivage, mais il est probable qu'il s'agit là d'autres sections non normales au clivage; car *si la bissectrice est voisine de la normale au clivage*, les faces latérales de la lamelle doivent s'éteindre à peu près suivant la trace du clivage, comme dans les pholérites belges. Il paraîtrait donc qu'il existe deux minéraux assez différents comme propriétés physiques et que l'on réunit sous le nom de pholérite :

a) *Pholérite de M. Miers.* — Clinorhombique avec clivage basique peu incliné sur le plan horizontal; bissectrice aiguë négative inclinée à 20° sur la normale au clivage, bissectrice obtuse dirigée suivant l'axe binaire. La direction d'extinction positive du clivage est donc normale à deux côtés opposés de son contour hexagonal. Les faces latérales du prisme s'éteignent à 8° et 27° de la verticale, ou à 4° et 13°;

b) *Pholérite commune.* — Caractérisée par l'obliquité d'extinction du clivage, la direction positive faisant 7° à 12° avec la normale à deux côtés opposés du contour. Bissectrice négative normale, ou à peu près normale, au clivage. Faces latérales s'éteignant exactement ou approximativement suivant la trace du clivage.

(*) Michel Levy et Lacroix, *loc. cit.*

NOTE

SUR

LES HYPOCYCLOÏDES TRICUSPIDALES

INSCRITES A UN TRIANGLE FIXE

PAR

M. A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIÉGE.

NOTE

SUR

LES HYPOCYCLOÏDES TRICUSPIDALES

INSCRITES A UN TRIANGLE FIXE

1. Soient A_1, B_1, C_1 et A'_1, B'_1, C'_1 les points de rencontre de deux droites quelconques avec les côtés d'un triangle fixe ABC. Si l'on suppose la droite $A_1B_1C_1$ fixe, on peut considérer les segments $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ comme constituant un système de coordonnées tangentielles de la droite $A'_1B'_1C'_1$. Nous choisirons comme directions positives de ces segments les directions BC, CA, AB et nous représenterons ces coordonnées par α, β, γ.

Entre les coordonnées α, β, γ d'une droite il doit exister une certaine relation. Soit $lx + my + nz = o$ l'équation en coordonnées barycentriques de la droite $A_1B_1C_1$, on aura

$$\frac{A_1C}{BA_1} = -\frac{n}{m},$$

d'où

$$A_1C = -\frac{an}{m-n}, \quad BA_1 = \frac{am}{m-n},$$

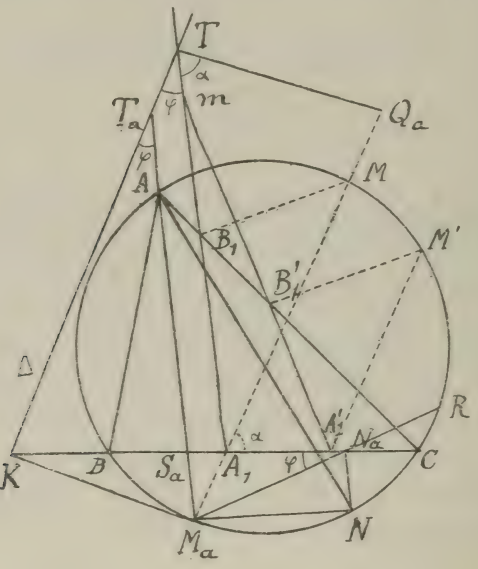
et par suite

$$\left.\begin{aligned} A'_1C &= -\frac{an + \alpha(m-n)}{m-n}, \quad BA'_1 = \frac{am + \alpha(m-n)}{m-n} \\ \frac{A'_1C}{BA'_1} &= -\frac{an + \alpha(m-n)}{am + \alpha(m-n)}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

En exprimant que le produit des trois rapports analogues à $A'_1C : BA'_1$ est égal à -1, on obtient la relation cherchée :

$$\Sigma a\beta\gamma = \Sigma bc \frac{l(m-n)}{(n-l)(l-m)}\alpha. \qquad (2)$$

Cette relation est de la forme $1 = \Sigma a\beta\gamma : \Sigma A\alpha$; elle permet donc de transformer aisément une équation non homogène en α, β, γ en une équation homogène, mais le degré de cette



dernière équation différera en général de celui de l'équation primitive.

Si $ux + vy + wz = 0$ est l'équation en coordonnées barycentriques de la droite $A'_1B'_1C'_1$, la relation (1) pourra s'écrire :

$$\frac{w}{v} = \frac{an + \alpha(m-n)}{am + \alpha(m-n)}, \qquad (3)$$

d'où

$$\alpha = a\frac{mw - nv}{(m-n)(v-w)}, \quad \beta = b\frac{nu - lw}{(n-l)(w-u)}, \quad \gamma = c\frac{lv - mu}{(l-m)(u-v)}. \qquad (4)$$

Ces relations permettent de trouver l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles barycentriques quand on en connaît l'équation en coordonnées α, β, γ.

2. En général, une droite $A'_1B'_1C'_1$ est déterminée quand on connaît des quantités $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ proportionnelles à ses coordonnées α, β, γ. En effet, en remplaçant dans la relation (2) α, β, γ par $k\alpha_1, k\beta_1, k\gamma_1$, on obtient, après suppression de la solution évidente $k = 0$:

$$k = \Sigma bc \frac{l(m-n)}{(n-l)(l-m)} \alpha_1 : \Sigma a\beta_1\gamma_1.$$

Il existe un cas d'indétermination, c'est celui où l'on a simultanément

$$\Sigma a\beta_1\gamma_1 = 0,$$

$$\Sigma bc \frac{l(m-n)}{(n-l)(l-m)} \alpha_1 = 0.$$

Ces équations déterminent deux systèmes de valeurs de $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. On trouve en désignant par k un facteur de proportionnalité

$$\alpha = \frac{ka}{m-n}, \qquad \beta = \frac{kb}{n-l}, \qquad \gamma = \frac{kc}{l-m},$$

et

$$\alpha = \frac{ka}{l(m-n)}, \quad \beta = \frac{kb}{m(n-l)}, \quad \gamma = \frac{kc}{n(l-m)}.$$

En remplaçant dans la relation (3) α, β, γ par les valeurs du premier système, on obtient

$$\frac{w}{v} = \frac{n+k}{m+k},$$

d'où

$$\frac{u}{l+k} = \frac{v}{m+k} = \frac{w}{n+k}.$$

La droite $A_1' B_1' C_1'$ a donc pour équation

$$(l + k)x + (m + k)y + (n + k)z = 0,$$

ou

$$lx + my + nz + k(x + y + z) = 0.$$

Lorsque k varie, la droite $A_1'B_1'C_1'$ reste parallèle à $A_1B_1C_1$; il est évident *a priori* que dans ce cas les coordonnées α, β, γ restent proportionnelles à des quantités constantes.

Si l'on opère de même pour le second système de valeurs, on trouve pour l'équation de la droite $A_1'B_1'C_1'$

$$\Sigma \frac{x}{mn + k} = 0.$$

Lorsque k varie, la droite $A_1'B_1'C_1'$ enveloppe une conique; cette conique est une parabole inscrite au triangle ABC et tangente à la droite $A_1B_1C_1$. car si l'on donne à k les valeurs $0, -mn, \infty$, cette droite coïncide avec $A_1B_1C_1$, BC et la droite de l'infini. Il est encore facile de vérifier que dans ce cas α, β, γ varient proportionnellement à des quantités constantes, car si F (*) désigne le foyer de la parabole, les triangles FA_1A_1', FB_1B_1', FC_1C_1' sont semblables et par suite α, β, γ sont proportionnels à FA_1, FB_1, FC_1.

3. Une $\mathfrak{H}$ (**) est complètement déterminée par quatre tangentes. Proposons-nous de trouver l'équation en coordonnées α, β, γ de l'hypocycloïde $\mathfrak{H}_1$ déterminée par les quatre tangentes AB, BC, CA, $A_1B_1C_1$. On peut toujours déterminer sur la circonférence ABC un point M tel que les droites MA_1, MB_1, MC_1 fassent un même angle avec les côtés BC, CA, AB du triangle. Si θ désigne cet angle, la droite $A_1B_1C_1$ est appelée la *pédale*

(*) Ce point n'est pas indiqué sur la figure. — La propriété résulte aussi de ce qu'une tangente mobile marque sur les autres tangentes des ponctuelles semblables.

(**) Le symbole $\mathfrak{H}$ représente une hypocycloïde à trois rebroussements.

d'angle θ du point M par rapport au triangle ABC; de même une autre droite $A'_1B'_1C'_1$ sera la pédale d'angle θ' d'un certain point M' de la circonférence ABC. On sait que si M' décrit la circonférence ABC, θ' restant constant, la droite $A'_1B'_1C'_1$ enveloppe une $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ inscrite au triangle ABC. Cette $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ coïncidera avec $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1$ si la droite $A'_1B'_1C'_1$ coïncide avec $A_1B_1C_1$ lorsque M' vient en M, c'est-à-dire si $\theta = \theta'$. Or, dans ce cas, les projetantes $M'A'_1$, $M'B'_1$, $M'C'_1$ sont parallèles à MA_1, MB_1, MC_1 et les segments $A_1A'_1$, $B_1B'_1$, $C_1C'_1$, c'est-à-dire les coordonnées α, β, γ de la droite $A'_1B'_1C'_1$, sont proportionnels aux distances du point M aux droites $M'A'_1$, $M'B'_1$, $M'C'_1$; les coordonnées α, β, γ peuvent donc être considérées comme les coordonnées normales du point M par rapport au triangle formé par ces trois droites; or, ce triangle se réduit à un point et ses angles sont égaux à ceux de ABC; en exprimant que sa surface est nulle, on obtient la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \tag{5}$$

qui constitue l'équation de $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1$ en coordonnées α, β, γ. Les formules (4) donnent pour l'équation de cette courbe en coordonnées tangentielles barycentriques

$$\Sigma \frac{a^2(mw - nv)}{(m - n)(v - w)} = 0$$

4. Soient $P_aP_bP_c$ et $P'_aP'_bP'_c$ (*) les triangles formés par les perpendiculaires menées à BC, CA, AB respectivement par les points A_1, B_1, C_1 et A'_1, B'_1, C'_1; ces triangles sont semblables au triangle ABC, et par conséquent les demi-sommes de leurs côtés homologues sont proportionnelles à a, b, c; donc les surfaces des trapèzes $P_bP_cP'_cP'_b$, $P_cP_aP'_aP'_c$, $P_aP_bP'_bP'_a$, dont les hauteurs sont α, β, γ, ne diffèrent que par un même facteur des quantités $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$. L'équation (5) exprime donc que la somme

(*) Ces triangles ne sont pas indiqués dans la figure.

de ces trapèzes est nulle, c'est-à-dire que les triangles $P_aP_bP_c$ et $P'_aP'_bP'_c$ sont égaux; par conséquent :

Si les perpendiculaires menées aux côtés d'un triangle aux points où ils sont rencontrés par une droite variable forment un triangle de surface constante, cette droite enveloppe une $\mathfrak{C}$ (*).

5. Désignons par A_1, B_1, C_1 et A'_1, B'_1, C'_1 les angles que forment les droites $A_1B_1C_1$ et $A'_1B'_1C'_1$ avec les droites BC, CA, AB, et par x, y, z les coordonnées normales du point d'intersection m des droites $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$. Les triangles $mA_1A'_1$, $mB_1B'_1$, $mC_1C'_1$ donnent

$$\alpha = -\frac{x \sin m}{\sin A_1 . \sin A'_1}, \quad \beta = -\frac{y \sin m}{\sin B_1 . \sin B'_1}, \quad \gamma = -\frac{z \sin m}{\sin C_1 . \sin C'_1},$$

et, par conséquent, l'équation (5) peut s'écrire

$$\Sigma \frac{ax}{\sin A_1 . \sin A'_1} = 0. \tag{6}$$

Les quantités $\sin A_1$, $\sin B_1$, $\sin C_1$ sont les coordonnées normales du point à l'infini sur la droite $A_1B_1C_1$; de même, $\cos A_1$, $\cos B_1$, $\cos C_1$ seraient les coordonnées du point à l'infini dans une direction perpendiculaire à $A_1B_1C_1$. On a donc les relations

$$\begin{aligned} \Sigma a \sin A_1 &= 0, \quad \Sigma a \sin A'_1 = 0, \\ \Sigma a \cos A_1 &= 0, \quad \Sigma a \cos A'_1 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

6. Si les droites $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ se déplacent parallèlement à elles-mêmes de façon à rester tangentes à une même $\mathfrak{C}$ variable, inscrite au triangle ABC, la relation (6) sera l'équation en coordonnées normales du lieu de leur point d'intersection m; ce lieu est donc une droite δ. Il est aisé de construire cette droite; en effet, sa transversale réciproque a pour équation

$$\Sigma ax \sin A_1 \sin A'_1 = 0$$

(*) Ce théorème a déjà été signalé par M. Neuberg : *Mathesis,* 1886, p. 116.

et les relations (7) montrent que cette équation est vérifiée quand on y remplace x, y, z respectivement par

$$\frac{1}{\sin A_1}, \quad \frac{1}{\sin B_1}, \quad \frac{1}{\sin C_1}$$

ou par

$$\frac{1}{\sin A'_1}, \quad \frac{1}{\sin B'_1}, \quad \frac{1}{\sin C'_1},$$

c'est-à-dire par les coordonnées normales des points N et N′ de la circonférence ABC qui sont les inverses triangulaires des points à l'infini dans les directions $A_1B_1C_1$ et $A'_1B'_1C'_1$. Ainsi :

Si à chacune des $\mathfrak{H}$ *inscrites à un triangle fixe on mène deux tangentes de directions constantes, le lieu de leur point d'intersection est la transversale réciproque de la droite qui joint les points inverses triangulaires des points à l'infini sur ces tangentes.*

Si l'on prolonge la projetante MA_1 jusqu'à son second point de rencontre M_a avec le cercle ABC, la droite AM_a est parallèle à la pédale $A_1B_1C_1$ du point M. Cette remarque, qui n'est pas nouvelle, nous sera utile dans la suite; elle permet de simplifier la construction des points N et N′ : en effet, les droites AM_a et AN étant isogonales par rapport à l'angle A, la droite M_aN est parallèle à BC.

7. Lorsque les droites $A_1B_1C_1$ et $A'_1B'_1C'_1$ sont rectangulaires, les points N et N′ sont diamétralement opposés sur le cercle ABC et la droite δ est la transversale réciproque du diamètre NN′ du cercle ABC. Si l'on fait varier les directions rectangulaires $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$, l'enveloppe de δ sera la transformée par transversales réciproques du centre O du cercle ABC, c'est-à-dire la conique ε inscrite au triangle ABC et ayant pour foyers le point O et l'orthocentre de ABC. Mais le point d'intersection m de deux tangentes rectangulaires $A_1B_1C_1$ et $A'_1B'_1C'_1$ à une $\mathfrak{H}$ appartient au cercle tritangent à cette hypocycloïde; si l'on considère deux des $\mathfrak{H}$ inscrites au triangle ABC, par un des points d'intersection de leurs cercles tritangents passent deux couples de tan-

gentes rectangulaires et, par suite, deux des droites δ ; si les $\mathfrak{H}$ coïncident, il en sera de même des cercles tritangents et des deux droites δ ; par conséquent, l'enveloppe des cercles tritangents est la conique ε, enveloppe des droites δ. Donc :

L'enveloppe du cercle tritangent à une $\mathfrak{H}$ *variable inscrite à un triangle fixe est la conique inscrite à ce triangle et qui a pour foyers son orthocentre et le centre de son cercle circonscrit.*

Le lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à un $\mathfrak{H}$ est une hypotrochoïde χ. Par un raisonnement analogue au précédent, on démontrerait que l'enveloppe des courbes χ correspondant aux diverses $\mathfrak{H}$ inscrites au triangle ABC est la transformée par transversales réciproques d'un cercle concentrique au cercle ABC.

8. Si l'on suppose que la droite $A_1'B_1'C_1'$ se rapproche indéfiniment de $A_1B_1C_1$ en restant tangente à l'hypocycloïde déterminée par les quatre tangentes AB, BC, CA, $A_1B_1C_1$, le point d'intersection m de ces deux droites aura pour limite le point de contact T de $A_1B_1C_1$ avec cette hypocycloïde. Lorsque la droite $A_1B_1C_1$ se déplace parallèlement à elle-même, le lieu de T est la limite de la droite δ, c'est-à-dire la droite Δ représentée par l'équation

$$\Sigma \frac{ax}{\sin^2 A_1} = 0. \qquad (8)$$

Dans ce cas, les points N et N′ coïncident et Δ est la transversale réciproque de la tangente en N au cercle ABC. Donc :

Le lieu du point de contact d'une tangente $A_1B_1C_1$ *de direction fixe menée à une* $\mathfrak{H}$ *variable inscrite à un triangle fixe* ABC *est une droite* Δ, *transversale réciproque de la tangente au cercle* ABC *au point* N *inverse triangulaire du point à l'infini sur* $A_1B_1C_1$.

9. Lorsque la direction de la tangente $A_1B_1C_1$ varie, la droite Δ enveloppe une courbe k du 3^e ordre et de la 4^e classe, trans-

formée par transversales réciproques du cercle ABC. Cette courbe présente un point double isolé et admet pour tangentes d'inflexion les côtés du triangle ABC.

En dérivant l'équation (8) par rapport à A_1, on obtient

$$\Sigma \frac{ax \cos A_1}{\sin^3 A_1} = 0. \tag{9}$$

Les relations (7) montrent que les coordonnées $\sin^3 A_1$, $\sin^3 B_1$, $\sin^3 C_1$ vérifient les équations (8) et (9); ces coordonnées sont donc celles du point de contact de Δ avec k; on obtiendra donc l'équation de k en remplaçant dans la première des relations (7) $\sin A_1$, $\sin B_1$, $\sin C_1$ par

$$\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y}, \sqrt[3]{z}.$$

Cette équation est donc

$$\Sigma a \sqrt[3]{x} = 0. \tag{10}$$

10. La courbe k étant de la 4e classe, par tout point P du plan passent quatre droites Δ, et comme à une droite Δ correspond une seule direction de la tangente $A_1B_1C_1$, par P passent quatre $\mathfrak{H}$ inscrites au triangle ABC. Lorsque P se trouve sur k, deux des droites Δ et, par suite, deux des $\mathfrak{H}$ coïncident; donc la courbe k fait partie de l'enveloppe des $\mathfrak{H}$ inscrites au triangle ABC. Mais l'enveloppe complète de ces $\mathfrak{H}$ se compose de l'enveloppe proprement dite, constituée par les côtés du triangle ABC, de la droite de l'infini et du lieu des points de rebroussement; ce dernier lieu est donc la courbe k. Ainsi :

Le lieu des points de rebroussement d'une $\mathfrak{H}$ *variable inscrite à un triangle fixe est la transformée par transversales réciproques du cercle circonscrit à ce triangle.*

11. Proposons-nous de trouver l'enveloppe des tangentes de rebroussement des $\mathfrak{H}$ inscrites au triangle ABC. Soit $ux + vy + wz = 0$ l'équation en coordonnées normales d'une de ces tangentes. Si A_1, B_1, C_1 désignent les angles qu'elle forme avec

les côtés du triangle, les coordonnées de son point de rencontre avec la droite de l'infini sont $\sin A_1$, $\sin B_1$, $\sin C_1$ et celles du point de rebroussement correspondant sont $\sin^3 A_1$, $\sin^3 B_1$, $\sin^3 C_1$; de plus, les angles A_1, B_1, C_1 vérifient les relations (7). On a donc les relations

$$\Sigma u \sin A_1 = 0, \qquad \Sigma u \sin^3 A_1 = 0, \qquad \Sigma a \sin A_1 = 0.$$

En éliminant A_1, B_1, C_1 entre les relations, on obtient l'équation de l'enveloppe cherchée en coordonnées normales tangentielles

$$\Sigma u (cv - bw)^3 = 0.$$

Cette équation représente une courbe de la 4e classe, triplement tangente à la droite de l'infini, tangente aux côtés et aux bissectrices du triangle ABC.

12. Le théorème énoncé au § 8 permet de déterminer les points de contact de quatre tangentes AB, BC, CA, $A_1B_1C_1$ avec l'hypocycloïde qu'elles terminent; en effet, pour trouver le point de contact de la tangente $A_1B_1C_1$, il suffira de construire le point N, inverse triangulaire du point à l'infini sur cette tangente par rapport au triangle ABC formé par les trois autres; la transversale réciproque Δ de la tangente en N au cercle ABC coupera $A_1B_1C_1$ au point de contact cherché. La construction de la droite Δ peut être simplifiée; menons par A la parallèle AM_a à $A_1B_1C_1$, et soient S_a et M_a les points de rencontre de cette droite avec BC et avec le cercle ABC; proposons-nous de déterminer le point de contact T_a de AM_a avec l'hypocycloïde déterminée par les quatre tangentes AB, BC, CA, AM_a: ce point sera situé sur Δ et les coordonnées normales absolues x', y', z' vérifient donc l'équation (8); on a donc la relation

$$a\frac{x'}{\sin^2 A_1} + b\frac{y'}{\sin^2 B_1} + c\frac{z'}{\sin^2 C_1} = 0,$$

ou, en remarquant que les quantités

$$\frac{1}{\sin A_1}, \quad \frac{1}{\sin B_1}, \quad \frac{1}{\sin C_1}$$

sont proportionnelles aux coordonnées normales absolues x'', y'', z'' du point N :

$$a\frac{x'x''}{\sin A_1} + b\frac{y'y''}{\sin B_1} + c\frac{z'z''}{\sin C_1} = 0.$$

Mais la droite M_aT_a fait avec les côtés BC, CA, AB des angles égaux à A_1, B_1, C_1 ; les rapports

$$\frac{x'}{\sin A_1}, \quad \frac{y'}{\sin B_1}, \quad \frac{z'}{\sin C_1}$$

sont donc respectivement égaux à T_aS_a, T_aA, T_aA ; la relation précédente devient donc

$$ax'' \,.\, T_aS_a + (by'' + cz'')\, T_aA = 0,$$

ou

$$ax'' \,.\, AS_a = -(ax'' + by'' + cz'')\, T_aA = -2ABC \,.\, T_aA,$$

$$\frac{AS_a}{T_aA} = -\frac{2ABC}{ax''} = -\frac{ABC}{BCM_a} = \frac{AS_a}{S_aM_a},$$

donc

$$T_aA = S_aM_a.$$

On déduit de là que *si par les sommets d'un triangle* ABC *on mène à une droite fixe* $A_1B_1C_1$ *des parallèles rencontrant les côtés en* S_a, S_b, S_c *et le cercle* ABC *en* M_a, M_b, M_c *et que sur chacune de ces parallèles on porte des segments* AT_a, BT_b, CT_c *équipollents aux segments* M_aS_a, M_bS_b, M_cS_c, *les extrémités* $T_aT_bT_c$ *de ces segments sont sur une même droite* Δ. *La droite* Δ *est la transversale réciproque d'une tangente au cercle* ABC *et toute parallèle* d *à* $A_1B_1C_1$ *est rencontrée par* Δ *en son point de rencontre avec l'hypocycloïde déterminée par les tangentes* AB, BC, CA, d.

13. La construction que nous venons d'indiquer présente une certaine analogie avec celle qui a été donnée par M. Collignon pour déterminer le point de contact d'une droite de Simson avec son enveloppe (*); à un certain point de vue, elle paraît plus pratique que celle de M. Collignon, car elle n'exige pas la connaissance du point dont la tangente $A_1B_1C_1$ est la pédale. Nous allons en déduire la construction de M. Collignon en l'étendant aux pédales obliques.

Supposons que $A_1B_1C_1$ soit la pédale d'angle α du point M; on a vu (§ 6) que les points M, A_1, M_α sont en ligne droite. Conservons les notations employées précédemment et menons par le point de contact T de $A_1B_1C_1$ avec l'hypocycloïde la normale d'angle α à cette courbe; soient Q_α le point où cette normale rencontre la projetante MA_1 et K le point de rencontre de Δ avec BC; la droite Δ étant la transversale réciproque de la tangente en N au cercle ABC, et $M_\alpha N$ étant parallèle à BC, la droite KM_α touche le cercle ABC en M_α. Les angles A_1TQ_α et $S_\alpha A_1M_\alpha$ sont tous deux égaux à α et les angles $S_\alpha M_\alpha A_1$ et TA_1Q_α sont égaux; les triangles $TQ_\alpha A_1$ et $A_1S_\alpha M_\alpha$ sont donc semblables; il en est de même des triangles KTA_1, $KT_\alpha S_\alpha$; on a donc les proportions

$$\frac{A_1Q_\alpha}{A_1T} = \frac{M_\alpha S_\alpha}{M_\alpha A_1}, \quad \frac{A_1T}{S_\alpha T_\alpha} = \frac{KA_1}{KS_\alpha}$$

d'où

$$\frac{A_1Q_\alpha}{S_\alpha T_\alpha} = \frac{KA_1}{M_\alpha A_1} \times \frac{M_\alpha S_\alpha}{KS_\alpha}. \tag{11}$$

Mais les triangles KA_1M_α et $KS_\alpha M_\alpha$ donnent

$$\frac{KA_1}{M_\alpha A_1} = \frac{\sin KM_\alpha A_1}{\sin K}, \quad \frac{M_\alpha S_\alpha}{KS_\alpha} = \frac{\sin K}{\sin KM_\alpha S_\alpha}$$

d'où

$$\frac{KA_1}{M_\alpha K_1} \times \frac{M_\alpha S_\alpha}{KS_\alpha} = \frac{\sin KM_\alpha A_1}{\sin KM_\alpha S_\alpha} = \frac{\sin MAM_\alpha}{\sin AMM_\alpha} = \frac{M_\alpha M}{AM_\alpha}.$$

(*) *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1905, vol. XXIII, pp. 6 et 9.

L'égalité (11) devient donc

$$\frac{A_1Q_a}{S_aT_a} = \frac{M_aM}{AM_a}.$$

Or $S_aT_a = AM_a$; donc $A_1Q_a = M_aM$, et par conséquent :

Si sur les projetantes d'angle α d'un point M *du cercle* ABC *on porte des segments* MQ_a, MQ_b, MQ_c *équipollents aux segments* M_aA_1, M_bB_1, M_cC_1 *déterminés sur ces projetantes par le cercle* ABC *et les côtés correspondants du triangle* ABC, *les extrémités* Q_a, Q_b, Q_c *de ces segments appartiennent à la normale d'angle α de l'hypocycloïde enveloppe de la pédale* $A_1B_1C_1$ *au point où elle est touchée par cette pédale.*

14. Les $\mathfrak{H}$ inscrites au triangle ABC coupent sous le même angle chacune des droites Δ tangentes à la courbe k. Il est intéressant de déterminer quelles sont, parmi les droites Δ, celles qui sont coupées sous un angle donné φ par les $\mathfrak{H}$ inscrites au triangle ABC. Supposons donc que la pédale $A_1B_1C_1$ fasse l'angle φ avec la droite Δ; menons par N la parallèle NN_a à $A_1B_1C_1$ et soit N_a le point de rencontre de cette droite avec BC. Les triangles KS_aM_a et AM_aN sont semblables, et par conséquent

$$\frac{AM_a}{KS_a} = \frac{M_aN}{S_aM_a}.$$

Or $AM_a = S_aT_a$ et $M_aN = S_aN_a$, donc

$$\frac{S_aT_a}{KS_a} = \frac{S_aN_a}{S_aM_a}.$$

Les triangles S_aKT_a et $S_aM_aN_a$ sont donc semblables et, par conséquent, l'angle $S_aN_aM_a$ est égal à S_aT_aK, c'est-à-dire à φ.

Soit R le second point de rencontre de M_aN_a avec le cercle ABC; la droite N_aN étant parallèle à AM_a est la pédale d'angle φ du point R (§ 6), elle est donc tangente à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}_1$, enveloppe des pédales d'angle φ du triangle ABC. D'autre part,

lorsque N décrit le cercle ABC, les points N et M_a ont sur ce cercle des vitesses égales et de sens contraires et la vitesse de rotation de NN_a autour de N est égale à celle de AM_a autour de A; elle est donc égale et de sens contraire à la moitié de la vitesse de N sur le cercle ABC; on déduit de là que NN_a est aussi tangente à une seconde hypocycloïde $\mathcal{H}_2$ tritangente au cercle ABC. Il existe donc trois directions des pédales $A_1B_1C_1$ qui font l'angle φ avec les droites Δ correspondantes : ce sont les directions des trois tangentes communes aux hypocycloïdes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Donc

La trajectoire d'angle φ d'une $\mathcal{H}$ variable inscrite à un triangle fixe se compose de trois droites.

En d'autres termes :

Si une $\mathcal{H}$ est inscrite à un triangle fixe, chacune de ses développoïdes est inscrite à un triangle fixe.

15. Le cas où $\varphi = 90^\circ$ mérite une attention spéciale. Dans ce cas, $\mathcal{H}_1$ est l'enveloppe des droites de Simson du triangle ABC. Si l'on place le point N en A, B, C, la droite NN_a devient successivement la parallèle menée par chaque sommet au côté opposé. Ces trois droites forment un triangle A'B'C' circonscrit à $\mathcal{H}_2$, et comme le cercle ABC est à la fois le cercle d'Euler de ce triangle et le cercle tritangent à $\mathcal{H}_2$, le triangle A'B'C' est un triangle principal de $\mathcal{H}_2$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}_2$ est l'enveloppe des droites de Simson de A'B'C'. Il résulte de là que les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont homothétiques par rapport au centre d'homothétie des triangles ABC et A'B'C', c'est-à-dire par rapport au centre de gravité G du triangle ABC; par suite leurs tangentes communes passent par G. Les trois positions cherchées pour NN_a sont donc les trois tangentes menées par G à $\mathcal{H}_1$; la droite Δ correspondant à l'une de ces trois positions est normale à $\mathcal{H}_1$ et est par conséquent tangente à la développée $\mathcal{H}'_1$ de $\mathcal{H}_1$. Or $\mathcal{H}'_1$ et $\mathcal{H}_1$ sont homothétiques par rapport au centre ω du cercle d'Euler du triangle ABC, et les tangentes menées de G à $\mathcal{H}_1$ ont

pour homologues les tangentes menées à $\mathcal{H}_4'$ par l'orthocentre H de ABC. Les trois positions cherchées pour Δ sont donc les tangentes à $\mathcal{H}_4'$ perpendiculaires aux tangentes menées par H à cette courbe; elles forment donc un triangle principal de $\mathcal{H}_4'$ ayant H pour orthocentre. Le centre du cercle d'Euler de ce triangle est ω; son centre de gravité est donc aussi le même que celui de ABC. Donc :

Si une $\mathcal{H}$ *variable est inscrite à un triangle fixe* ABC, *sa développée est inscrite à un autre triangle fixe* $\alpha\beta\gamma$ *ayant même orthocentre et même centre de gravité que le triangle* ABC.

16. Réciproquement, *si une* $\mathcal{H}$ *variable coupe orthogonalement les trois côtés d'un triangle fixe* $\alpha\beta\gamma$, *elle est inscrite à un autre triangle fixe* ABC *ayant même orthocentre et même centre de gravité que* $\alpha\beta\gamma$.

En effet, le triangle ABC peut être tracé quand on connaît le triangle $\alpha\beta\gamma$ défini au paragraphe précédent. Il suffit de construire l'hypocycloïde $\mathcal{H}_1$ homothétique de l'enveloppe $\mathcal{H}_4'$ des droites de Simson de $\alpha\beta\gamma$ par rapport au centre ω du cercle d'Euler de ce triangle, le rapport d'homothétie étant $-1:3$; les tangentes menées à $\mathcal{H}_1$ perpendiculairement aux tangentes menées par l'orthocentre de $\alpha\beta\gamma$ sont les côtés de ABC.

17. L'hypocycloïde qui a pour points de rebroussement les sommets d'une quelconque des $\mathcal{H}$ inscrites au triangle ABC a cette courbe pour développée; elle coupe donc orthogonalement les côtés de ABC et, par suite, elle est inscrite à un autre triangle $\alpha'\beta'\gamma'$. Le lieu de ses points de rebroussement et, par suite, le lieu des sommets d'une $\mathcal{H}$ inscrite au triangle ABC est donc (§ 10) une courbe du 3e ordre et de la 4e classe transformée par transversales réciproques par rapport au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ du cercle $\alpha'\beta'\gamma'$.

SUR LA TRANSFORMATION

D'INTÉGRALES A CIRCUIT FERMÉ

EN

INTÉGRALES A CIRCUIT OUVERT

PAR

J. BEAUPAIN

INGÉNIEUR EN CHEF AU CORPS DES MINES

SUR LA TRANSFORMATION

D'INTÉGRALES A CIRCUIT FERMÉ

EN

INTÉGRALES A CIRCUIT OUVERT

1. Les intégrales à circuit fermé se présentent dans une foule de recherches. Une intégrale qui a servi à définir une fonction peut perdre toute signification pour certaines valeurs de ses paramètres. Pour conserver à la définition la généralité qu'elle doit comporter, on a recours à la notion d'intégrales à circuit fermé. Nous en trouvons plusieurs exemples dans la théorie des fonctions eulériennes, et Hankel (*), le premier, exprima l'inverse de la fonction eulérienne de seconde espèce par une intégrale qui subsiste pour toutes les valeurs de l'argument. De nombreuses applications d'intégrales à circuit fermé se présentent encore dans la recherche des solutions des équations différentielles par des intégrales définies, et la célèbre série de Gauss en fournit des exemples classiques. Le plus souvent, il y aura utilité à remplacer ces intégrales à circuit fermé par des intégrales à circuit ouvert, et cette transformation est toujours possible sous certaines conditions qu'il est aisé de déterminer dans chaque cas particulier. Dans cette note, nous ne considérons que

(*) HANKEL, *Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments*. (SCHLÖMILCH'S ZEITSCHRIFT FÜR MATH. UND PHYS., 9. Jahrgang, 1864.)

le cas le plus simple, celui d'une fonction présentant une seule discontinuité sur le chemin d'intégration. Considérons l'intégrale

$$\int_{\mathrm{P}}^{(q)} \varphi(u)(u-q)^{\sigma-1}du,$$

que nous désignerons par I.

$\varphi(u)$ est une fonction régulière dans le domaine du point q, et le point p n'est pas un point singulier de cette fonction. Le chemin d'intégration se compose de la ligne PNM et d'un lacet entourant le point q. Nous supposons encore que ce lacet ne contient aucune singularité de la fonction $\varphi(u)$. De plus, la ligne PNM peut être quelconque à condition cependant que, dans ses déformations successives, elle ne passe par aucun point singulier de $\varphi(u)$.

L'intégrale aura une signification unique, quand nous aurons fixé la valeur de $\varphi(u)$ au point initial, ainsi que celle du facteur $(u-q)^{\sigma-1}$. Par définition,

$$(u-q)^{\sigma-1} = e^{(\sigma-1)\log(u-q)}.$$

Si nous désignons par ρ_0 la distance des points P et q et par θ_0 l'argument que la droite Pq fait avec la partie positive de l'axe des abscisses, nous prendrons, pour le logarithme de $u-q$, au point P, la détermination principale, c'est-à-dire que nous poserons

$$\log(p-q) = \log\rho_0 + i\theta_0.$$

Quand le point u chemine sur la ligne PNM, en partant du point P, on a, en tout point de la courbe PNM,

$$\log(u-q) = \log\rho + i\theta,$$

ρ désignant la distance du point décrivant au point q et θ étant l'angle que cette droite fait avec la partie positive de l'axe des abscisses. Ceci posé, l'intégrale I se décompose en trois autres :

$$\mathrm{I} = \int_{p}^{\eta} + \int^{(q)} + \int_{\eta}^{p},$$

η désignant l'affixe du point M.

Après un circuit de la variable sur le lacet (q), le facteur $(u-q)^{\sigma-1}$ est égal à

$$(u-q)^{(\sigma-1)\,[\log(u-q)+2\pi i]},$$

et l'on a

$$I=(1-e^{2\pi i\sigma})\int_p^{\eta}+\int^{(q)}\varphi(u)\,(u-p)^{\sigma-1}du.$$

$\varphi(u)$ étant régulière, par hypothèse, dans le domaine du point q,

$$\varphi(u)=\varphi(q)+\frac{u-q}{1}\varphi'(q)+\frac{(u-q)^2}{1.2}\varphi''(q)+\cdots+\frac{(u-q)^\mu}{1.2\ldots\mu}\varphi^\mu(q)+\cdots$$

Par suite,

$$I=(1-e^{2\pi i\sigma})\left[\int_p^{\eta}\varphi(u)(u-q)^{\sigma-1}du-\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\varphi^{(\mu)}(q)\frac{(\eta-q)^{\mu+\sigma}}{\mu+\sigma}\right].$$

Si λ est un nombre entier tel que l'on ait

$$R(\lambda+\sigma-1)<0,\quad R(\lambda+\sigma)>0,$$

$R(z)$ désignant la partie réelle de l'affixe z, nous pourrons distinguer dans cette somme deux parties, l'une,

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1}\varphi^{(\mu)}(q)\frac{(\eta-q)^{\mu+\sigma}}{\mu+\sigma},$$

qui augmente indéfiniment, quand le rayon du lacet décroît au delà de toute limite, et l'autre,

$$\sum_{\mu=\lambda}^{\mu=\infty}\varphi^{(\mu)}(q)\frac{(\eta-q)^{\mu+\sigma}}{\mu+\sigma},$$

qui tend vers zéro avec ce rayon.

En conséquence, si nous négligeons les termes infiniment petits,

$$I=(1-e^{2\pi i\sigma})\left[\int_p^{\eta}\varphi(u)(u-q)^{\sigma-1}du-\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1}\varphi^{(\mu)}(q)\frac{(\eta-q)^{\mu+\sigma}}{\mu+\sigma}\right].$$

Mais

$$\int_p^{\eta} (u-q)^{\sigma+\mu-1} du = \frac{(\eta-q)^{\mu+\sigma} - (p-q)^{\mu+\sigma}}{\mu+\sigma}.$$

Finalement, on a, en passant à la limite,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_P^{(q)} \varphi(u)(u-q)^{\sigma-1} du = (1-e^{2\pi i\sigma}) \\ &\int_p^{q} \left(\varphi(u) - \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \varphi^{(\mu)}(q) \frac{(u-q)^{\mu}}{1.2\ldots\mu} \right) (u-q)^{\sigma-1} du \\ &\qquad - (1-e^{2\pi i\sigma}) \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \varphi^{(\mu)}(q) \frac{(p-q)^{\mu+\sigma}}{\mu+\sigma}. \end{aligned} \right.$$

Cette expression se simplifie, si le point P s'éloigne indéfiniment de l'origine; alors

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\infty}^{(q)} \varphi(u)(u-q)^{\sigma-1} du = (1-e^{2\pi i\sigma}) \\ &\int_{\infty}^{q} \left(\varphi(u) - \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \varphi^{(\mu)}(q) \frac{(u-q)^{\mu}}{1.2\ldots\mu} \right) (u-q)^{\sigma-1} du. \end{aligned} \right.$$

2. Deux applications de cette formule en montreront l'utilité. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{\infty}^{(0)} e^{-u}(-u)^{\sigma-1} du.$$

En vertu de nos conventions,

$$\log(-u) = \log u - \pi i;$$

nous pourrons écrire

$$I = -e^{-\pi i\sigma} \int_{\infty}^{(0)} e^{-u} u^{\sigma-1} du.$$

Donc

$$I = -(e^{-\pi i\sigma} - e^{\pi i\sigma}) \int_{\infty}^{0} \left(e^{-u} - \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} (-1)^{\mu} \frac{u^{\mu}}{1.2\ldots\mu} \right) u^{\sigma-1} du,$$

ou

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-u}-\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1}(-1)^{\mu}\frac{u^{\mu}}{1.2\ldots\mu}\right)u^{\sigma-1}du=-\frac{1}{2i\sin\pi\sigma}\int_{\infty}^{(0)}e^{-u}(-u)^{\sigma-1}du.$$

En partant de la définition donnée par Hankel pour l'inverse de la fonction eulérienne de seconde espèce, M. Bigler (*) a été conduit à la formule

$$\Gamma(\sigma)=-\frac{1}{2i\sin\pi\sigma}\int_{\infty}^{(0)}e^{-u}(-u)^{\sigma-1}du.$$

Ainsi

$$(3)\qquad \Gamma(\sigma)=\int_0^{+\infty}\left(e^{-u}-\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1}(-1)^{\mu}\frac{u^{\mu}}{1.2\ldots\mu}\right)u^{\sigma-1}du,$$

λ étant un nombre entier positif satisfaisant aux deux conditions

$$R(\lambda+\sigma-1)<0,\qquad R(\lambda+\sigma)>0.$$

Il est facile de vérifier que la fonction définie par l'équation (3) jouit des propriétés de la fonction gamma. Cette formule, donnée par Cauchy (**) dans ses *Exercices mathématiques*, a été retrouvée par M. Saalschütz (***).

3. Comme seconde application, nous choisirons l'intégrale eulérienne de première espèce. On sait que

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{+1}\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx.$$

Soit l'intégrale

$$I(\alpha,\beta)=\int_1^{+(0)}\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx.$$

(*) Bigler, *Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter.* (Crelle's Journal, Bd CII, 1887.)

(**) Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, 2e année, p. 92, 1827.

(***) Saalschütz, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, p. 246, 1887.

Si les quantités α et β ont leur partie réelle positive, les intégrales suivant le lacet s'évanouiront, et il viendra

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta) = (1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_1^{(0)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx + (1 - e^{2\pi i\beta}) \int_1^{(0)} \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx.$$

Si l'on veut que l'expression $\mathrm{I}(\alpha, \beta)$ généralise la fonction $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$, on devra poser

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I}(\alpha, \beta) = &- \frac{1}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \int_1^{(0)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx \\ &- \frac{1}{1 - e^{2\pi i\beta}} \int_1^{(0)} \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx, \end{aligned} \right.$$

ou encore,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I}(\alpha, \beta) = &\frac{e^{-\pi i\alpha}}{2i \sin \pi\alpha} \int_1^{(0)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx \\ &+ \frac{e^{-\pi i\beta}}{2i \sin \pi\beta} \int_1^{(0)} \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx, \end{aligned} \right.$$

ce qui nous ramène à une expression analogue à celle qui a été considérée par M. Bigler (*).

Si m et n désignent deux nombres entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$\mathrm{R}(m + \alpha - 1) < 0, \quad \mathrm{R}(m + \alpha) > 0, \quad \mathrm{R}(n + \beta - 1) < 0, \quad \mathrm{R}(n + \beta) > 0,$$

on aura, en vertu de la formule (1),

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta) = \int_\varepsilon^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx + \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} (-1)^\mu \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \mu \end{bmatrix}_+ \frac{\varepsilon^{\alpha+\mu}}{\alpha+\mu}$$
$$+ \int_\varepsilon^1 \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx + \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} (-1)^\mu \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \mu \end{bmatrix}_+ \frac{\varepsilon^{\beta+\mu}}{\beta+\mu},$$

(*) Bigler, *loc. cit.*

ε étant une quantité positive voisine de zéro, et la notation

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \mu \end{bmatrix}_+$$

représentant la factorielle

$$\frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)\ldots(\alpha + \beta + \mu - 1)}{1.2.3\ldots\mu}.$$

Nous négligeons d'ailleurs tous les termes qui s'évanouissent avec ε.

Or, pour toutes les valeurs de μ satisfaisant respectivement aux conditions énoncées ci-dessus,

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\alpha+\mu-1}\,dx = -\frac{\varepsilon^{\alpha+\mu}}{\alpha+\mu}$$

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{0} \frac{dx}{x^{\beta+\mu+1}} = \frac{\varepsilon^{\beta+\mu}}{\beta+\mu};$$

donc,

$$\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx - \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} (-1)^{\mu} \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \mu \end{bmatrix}_+ \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\alpha+\mu-1}dx$$

$$+ \int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx - \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} (-1)^{\mu} \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \mu \end{bmatrix}_+ \int_{0}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dx}{x^{\beta+\mu+1}},$$

plus une suite de termes qui s'évanouissent avec ε.

Finalement,

$$(6)\quad \left\{ \mathrm{I}(\alpha,\beta) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}} - \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} (-1)^{\mu} \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \mu \end{bmatrix}_+ x^{\mu} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} (-1)^{\mu} \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \mu \end{bmatrix}_+ \frac{1}{x^{\mu}} \right] x^{\alpha-1}dx. \right.$$

Cette formule a été donné par M. Saalschütz (*).

(*) Saalschütz, *Weitere Bemerkungen über die Gammafunctionen mit negativen Argumenten.* (Zeitschrift für Math. und Phys., 33. Jahrgang, 1888.)

Il est facile de montrer que la fonction $\mathrm{I}(\alpha, \beta)$ jouit de la propriété suivante :

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \mathrm{I}(\alpha + 1, \beta).$$

Écrivons la relation (5) sous la forme :

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta) = \frac{e^{-\pi i \alpha}}{2i \sin \pi\alpha} \int_1^{(0)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx$$

$$+ \frac{e^{-\pi i \beta}}{2i \sin \pi\beta} \int_1^{(0)} \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta+1}} dx + \frac{e^{-\pi i \beta}}{2i \sin \pi\beta} \int_1^{(0)} \frac{x^{\beta}}{(1+x)^{\alpha+\beta+1}}.$$

L'intégration par parties donne, respectivement,

$$\int_1^{(0)} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{1 - e^{2\pi i \alpha}}{\alpha 2^{\alpha+\beta}} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \int_1^{(0)} \frac{x^{\alpha} dx}{(1+x)^{\alpha+\beta+1}},$$

$$\int_1^{(0)} \frac{x^{\beta}}{(1+x)^{\beta}} \frac{dx}{(1+x)^{\alpha+1}} = -\frac{1 - e^{2\pi i \beta}}{\alpha 2^{\alpha+\beta}} + \frac{\beta}{\alpha} \int_1^{(0)} \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta+1}} dx;$$

donc,

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \mathrm{I}(\alpha + 1, \beta).$$

De cette égalité, on déduit celle-ci :

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+m+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)} \mathrm{I}(\alpha + m, b + n).$$

Les arguments $\alpha + m$ et $\beta + n$ ayant leur partie réelle positive,

$$\mathrm{I}(\alpha + m, \beta + n) = \frac{\Gamma(\alpha + m)\,\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\alpha + \beta + m + n)};$$

par suite,

$$\mathrm{I}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Liége, le 15 mars 1906.

ÉTUDES

DE

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE

PAR

Lucien GODEAUX

ÉTUDIANT EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
À L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

ÉTUDES

DE

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE

I. — Sur la génération d'une surface algébrique particulière.

Dans ce travail, nous exposons un procédé de génération d'une surface algébrique particulière dont certains cas spéciaux conduisent à des résultats intéressants que nous espérons pouvoir publier plus tard.

1. Soient dans l'espace deux surfaces S_1 d'ordre m_1, S_2 d'ordre m_2 et deux congruences G_1 d'ordre n_1 et de classe n'_1, G_2 d'ordre n_2 et de classe n'_2.

Par un point M de l'espace, menons les droites g_1, g_2 appartenant aux congruences G_1, G_2. Au point M, nous faisons correspondre les $m_1 m_2 n_1 n_2$ droites en joignant les points (g_1, S_1) aux points (g_2, S_2).

Aux ∞^3 points de l'espace correspondent les droites d'un complexe Φ dont nous allons rechercher l'ordre.

Soit (P, π) un faisceau-plan de sommet P et de plan π. Entre certains rayons p_1 de ce faisceau et d'autres rayons p_2, nous établissons la correspondance suivante : un rayon de G_1 mené par un point (p_1, S_1) rencontre un rayon de G_2 mené par un

point (p_2, S_2). Une coïncidence des rayons p_1, p_2 est évidemment une droite du complexe.

Menons un rayon p_1. Par les m_1 points (p_1, S_1) menons les $m_1 n_1$ rayons de la congruence G_1. Les droites de la congruence G_2 qui s'appuient sur un de ces rayons et sur la courbe (S_2, π) sont au nombre de

$$2m_1 m_2 n_1 (n_2 + n_2').$$

Par les points de rencontre de ces droites avec la surface S_2, menons les rayons p_2. Inversement, à un rayon p_2 correspondent

$$2m_1 m_2 n_2 (n_1 + n_1')$$

rayons p_1. D'après le principe de Chasles, il y a

$$2m_1 m_2 (2n_1 n_2 + n_1 n_2' + n_1' n_2)$$

coïncidences. Remarquons qu'une droite appartenant au faisceau (P, π) et qui s'appuie sur la courbe $(S_1 S_2)$ absorbe $n_1 + n_2$ coïncidences. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle façon que deux de ses côtés appartiennent à des congruences (n_1, n_1'), (n_2, n_2'), *tandis que les sommets opposés décrivent des surfaces respectivement d'ordre* m_1, m_2, *le troisième côté décrira un complexe d'ordre*

$$m_1 m_2 (4n_1 n_2 + 2n_1 n_2' + 2n_1' n_2 - n_1 - n_2).$$

Nous avons déjà rencontré quelques cas particuliers de ce théorème (*).

2. Soit Ψ un complexe d'ordre p. Les points correspondants aux droites communes aux complexes Φ et Ψ décrivent une surface dont nous allons rechercher l'ordre.

Soient (x_1) et (x_2) deux ponctuelles superposées. Par un point x_1 de la première, menons les n_1 droites g_1 de G_1. Par les $n_1 m_1$

(*) *Notes de Géométrie synthétique.* (Mémoires de la Société des sciences, lettres et arts de Mons, 1907, 3e sér., t. IX.)

points (g_1, S_1) menons les droites appartenant au complexe Ψ, elles forment $n_1 m_1$ cônes d'ordre p. Ces cônes marquent sur la surface S_2, $m_1 n_1$ courbes d'ordre $m_2 p$. Les droites de G_2 qui s'appuient sur ces courbes engendrent $m_1 n_1$ surfaces d'ordre

$$m_2 p(n_2 + n'_2).$$

Ces surfaces marquent sur la ponctuelle (x_2) un nombre

$$m_1 m_2 n_1 p(n_2 + n'_2)$$

de points. Inversement, à un point x_2 correspondent

$$m_1 m_2 n_2 p(n_1 + n'_1)$$

points x_1. D'après le principe de Chasles, il y a

$$m_1 m_2 p(2n_1 n_2 + n_1 n'_2 + n'_1 n_2)$$

coïncidences. Les droites qui correspondent à une de ces coïncidences appartiennent au complexe Φ d'après la définition même de ce complexe, donc les coïncidences sont des points de la surface cherchée et on a le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés décrivent des congruences (n_1, n'_1), (n_2, n'_2), *les sommets opposés décrivant des surfaces respectivement d'ordre* m_1, m_2, *tandis que le troisième côté décrit un complexe* (p, p), *le troisième sommet décrira une surface* S *d'ordre*

$$m_1 m_2 p(2n_1 n_2 + n_1 n'_2 + n'_1 n_2).$$

Nous avons déjà rencontré quelques cas particuliers de ce théorème (*).

3. Soit P un point par lequel passent ∞^1 droites de G_1, ces droites étant les génératrices d'un cône d'ordre γ_1.

Par le point P, menons les n_2 droites g_2 de la congruence G_2

(*) *Notes de Géométrie,* loc. cit.

Sur une surface du quatrième ordre. (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1907, 4e sér., t. VII.)

et par les points (g_2, S_2) menons les droites appartenant au complexe Ψ. Les cônes engendrés rencontrent S_1 suivant m_2n_2 courbes d'ordre pm_1. Ces courbes déterminent $m_1m_2n_2p\gamma_1$ génératrices du cône de sommet P par leur intersection avec ce cône, donc :

Le point P *est multiple d'ordre* $m_1m_2n_2p\gamma_1$ *sur la surface* S.

4. Soit Q un point de l'intersection des surfaces S_1, S_2.

Ce point Q peut être considéré comme le sommet de n_1n_2p triangles dégénérés en un point et dont les côtés appartiennent respectivement à G_1, G_2, Ψ; donc :

La ligne d'intersection des surfaces S_1, S_2 *est multiple d'ordre* n_1n_2p *sur la surface* S.

5. Soit l une droite du complexe Φ qui est multiple d'ordre λ pour le complexe Ψ (*). Il lui correspond au moins un point de la surface S; désignons par L ce point.

Soient (x_1), (x_2) deux ponctuelles de même support x, cette droite passant par L. Nous avons vu qu'à un point x_1 correspondent des points x_2 en nombre $m_1m_2n_1p(n_2 + n_2')$, mais si le point x_1 coïncide avec le point L, λ points x_2 viennent aussi coïncider avec L; donc :

Le point L *est multiple d'ordre* λ *sur la surface* S.

6. Pour terminer, nous signalerons le cas particulier suivant :

Si un triangle se déforme de telle manière qu'un de ses côtés passe par un point donné, un second côté décrivant une congruence linéaire, tandis que les sommets opposés décrivent des plans donnés et que le troisième côté appartient à un complexe linéaire, le troisième sommet décrira une surface cubique.

(*) Nous entendons par là que la droite l est multiple d'ordre λ pour tout cône du complexe dont le sommet est sur l, ou pour toute courbe du complexe dont le plan passe par l.

II. — Sur quelques surfaces algébriques engendrées par le sommet d'un angle variable.

Si les côtés d'un angle de grandeur variable décrivent des congruences données et rencontrent un plan donné en des points d'une même courbe d'un faisceau donné dans ce plan, le sommet de l'angle pourra occuper ∞^2 positions et par conséquent engendrera une surface. Dans cette note, nous nous proposons d'étudier quelques surfaces obtenues par ce procédé.

1. Soient G_{1_m}, G_{1_n} deux congruences linéaires de droites respectivement de classe m, n; α un plan fixe et Φ un faisceau ponctuel de courbes d'ordre μ dans ce plan.

Considérons un angle de sommet P dont les côtés appartiennent respectivement aux congruences G_{1_m}, G_{1_n}, et rencontrent le plan α en des couples de points d'une même courbe du faisceau Φ. Recherchons l'ordre du lieu de P au moyen du principe de Chasles.

Soit x une droite quelconque support de deux ponctuelles (X_1), (X_2). Par un point de (X_1) menons la droite appartenant à la congruence G_{1_m} et par le point de rencontre de cette droite avec le plan α la courbe du faisceau Φ. Les droites de G_{1_n} qui s'appuient sur cette courbe engendrent une surface d'ordre $\mu(1+n)$ qui marque, sur la ponctuelle (X_2), $\mu(1+n)$ points. Inversement, à un point X_2 correspondent $\mu(1+m)$ points X_1. Les ponctuelles (X_1), (X_2) sont donc liées par une correspondance $[\mu(1+m), \mu(1+n)]$; donc, d'après le principe de Chasles, il y a $\mu(m+n+2)$ coïncidences. Si nous remarquons que l'une de celles-ci tombe dans le plan α, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Si un angle varie de telle sorte que ses côtés décrivent deux congruences linéaires respectivement de classes m, n, *et rencon-*

trent un plan fixe en des points d'une même courbe d'ordre μ *d'un faisceau ponctuel, son sommet décrira une surface* M *d'ordre* $\mu(m + n + 2) - 1$.

2. Une droite commune aux congruences G_{1m}, G_{1n} appartient évidemment à la surface M, car alors l'angle est nul et les points de rencontre de ses côtés avec le plan α sont confondus.

Par un des points de base du faisceau Φ menons la droite appartenant à la congruence G_{1m}. Par un point de cette droite menons le rayon appartenant à G_{1n}; ce rayon détermine une courbe du faisceau Φ qui passe nécessairement par le point de base considéré; donc les droites des congruences G_{1m}, G_{1n} passant par les points de base du faisceau Φ appartiennent à la surface M. En résumé :

La surface M *contient* $1 + mn + 2\mu^2$ *droites simples.*

3. Soit x une droite de la congruence G_{1m}. Cette droite détermine une courbe du faisceau Φ passant par le point (x, α). Les droites de la congruence G_{1n} qui s'appuient sur cette courbe engendrent une surface qui rencontre x en $\mu(1 + n) - 1$ points non situés sur α. On en conclut que la surface M est rencontrée par une droite de G_{1m} en $\mu(1 + n) - 1$ points non singuliers pour cette congruence. Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

1° $m = 0$. *Si l'une des congruences est une gerbe de rayons, le centre de la gerbe est un point multiple d'ordre* μ *sur la surface* M;

2° $m = 1$. *Si l'une des congruences est bilinéaire, ses directrices sont multiples d'ordre* μ *pour la surface* M;

3° $m = 3$. *Si l'une des congruences est formée par les bisécantes d'une cubique gauche, cette courbe est multiple d'ordre* 2μ *sur la surface* M.

4. Supposons que la congruence G_{1n} est le lieu des droites qui s'appuient sur une droite d et sur une courbe d'ordre m rencontrant $m - 1$ fois d.

Soit A un point de d et x une droite passant par ce point. En faisant le même raisonnement qu'au numéro 1, nous pouvons établir entre deux ponctuelles (X_1), (X_2) de support commun x une correspondance $[\mu, \mu(1 + n)]$, à condition d'exclure le point A. Le principe de Chasles nous permet maintenant de conclure que la droite x rencontre encore la surface M en $\mu(n + 2)$ points et que par conséquent le point A est multiple d'ordre $\mu m - 1$. Si nous retournons au numéro 3, nous voyons que la courbe directrice d'ordre m est multiple d'ordre 2μ.

Si l'une des congruences possède deux lignes directrices, savoir une droite et une courbe, la droite est multiple d'ordre $\mu m - 1$ *et la courbe d'ordre* 2μ *sur la surface* M.

La surface générale que nous venons d'étudier contient comme cas particulier une surface cubique à deux points doubles que nous avons étudiée précédemment (*).

(*) *Notes de Géométrie.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 1908, 3e sér., t. VIII.)

III. — Le théorème de Grassmann sur une surface algébrique.

1. Soient F une surface algébrique dépourvue de singularités, et sur cette surface un réseau $|C|$ de degré n, formé par des courbes C de genre p et dépourvu de points de base et de courbes fondamentales.

Choisissons sur la surface F trois groupes de n points situés à la fois sur ∞^1 courbes C, ne se trouvant pas sur une même courbe C, et désignons-les par P_1, P_2, P_3. Soient de plus trois autres courbes C_1, C_2, C_3 choisies d'une manière quelconque dans $|C|$, c'est-à-dire n'appartenant pas toutes trois à un même faisceau.

Un point quelconque X de F détermine une courbe C_i' de $|C|$ passant par le groupe de n points P_i. Cette courbe C_i' marque sur la courbe C_i un groupe de n points P_i' situé sur ∞^1 courbes C. Donnant à i les valeurs 1, 2, 3, nous obtenons trois groupes de points P_1', P_2', P_3'; si ces trois groupes sont sur une même courbe C, le point X décrit une courbe G.

Dans le cas où F est un plan et où les courbes C sont les droites de ce plan, on retrouve un théorème bien connu de Grassmann.

2. Soit K une courbe tracée sur la surface F et rencontrant une courbe C en k points. Recherchons le nombre de points communs aux courbes G et K.

Par un point X_1 de K, menons une courbe C passant par le groupe P_1. Cette courbe détermine sur C_1 un groupe de points P_1'. Entre des points X_2, X_3 de K, établissons une correspondance telle que le groupe de points P_2' marqué sur C_2 par la courbe C passant par X_2 et P_2, et le groupe P_3' obtenu sur C_3 au moyen

de X_3 et P_3 de la même manière, déterminent une C contenant le groupe P'_1. Comme on le voit facilement, les points X_2, X_3 sont liés par une correspondance (k, k) et la valeur (*) de cette correspondance est nulle, car quand X_2 varie, les k points X_3 qui lui correspondent forment une série linéaire. D'après le principe de Cayley-Brill, il y a donc $2k$ coïncidences.

Par un raisonnement analogue, on voit que les séries de points X_1, X_2, X_3 présentent $3k$ coïncidences.

Les courbes G *et* K *ont* 3k *points communs.*

En particulier, si la courbe K est une courbe C quelconque, on voit que les courbes C et G ont $3n$ points communs.

Une courbe C rencontre la jacobienne J du réseau $|C|$ en $2(p + n - 1)$ points, donc les courbes J et G ont $6(p + n - 1)$ points communs.

En se rapportant à la définition du caractère d'immersion (**), on peut écrire :

Le caractère d'immersion θ *de la courbe* G *est*

$$\theta = 3(2p + n - 2).$$

La courbe G passe évidemment par les points des groupes P_1, P_2, P_3 et par les points communs aux couples de courbes C_1, C_2; C_2, C_3; C_3, C_1.

3. Représentons projectivement le réseau $|C|$ par les droites d'un plan F*, la surface F sera représentée par le plan n^{uple} F* et la courbe G aura pour correspondante dans ce plan une cubique elliptique G*. La courbe de diramation du plan F* est d'ordre $2(n + p - 1)$; donc sur G* se trouvent $6(n + p - 1)$ points de diramation. Les courbes G, G* se trouvant liées par une corres-

---

(*) Valenza, Werthigkeit.

(**) F. Severi, *Il genere aritmetico ed il genere lineare...* (Atti di Torino, 1902, t. XXXVII, § 1.)

pondance $(n, 1)$, on a, d'après une formule classique de M. Zeuthen (*),

$$\rho = 3n + 3p - 2,$$

ρ étant le genre de la courbe G.

Le genre d'une courbe de Grassmann d'un réseau de degré n *et de genre* p *est*

$$\rho = 3n + 3p - 2,$$

le réseau étant privé de base et de courbes fondamentales.

Liége, 25 novembre 1908.

(*) SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1894, 2e sér., t. XXII, § 10.)

SUR

QUELQUES GÉNÉRATIONS DES CONIQUES

ET

DES QUADRIQUES

PAR

J. MALAISE

(Liége)

SUR

QUELQUES GÉNÉRATIONS DES CONIQUES

ET

DES QUADRIQUES

Les propositions qui suivent présentent une certaine analogie avec la génération des coniques d'après Maclaurin et Braikenridge; elles sont peut-être nouvelles.

Théorème I. — *Un triangle* ABC *se déforme de manière que le côté* CA *pivote dans un plan donné* α *autour d'un point fixe* Q; *le côté* AB *tourne autour d'un point fixe* P; *le sommet* B *se meut dans un plan donné* β; *enfin, le côté* BC *s'appuie constamment sur deux droites données* d, d' *non situées dans un même plan. Dans ces conditions, le point* C *décrit une conique.*

En effet, le côté BC s'appuyant constamment sur les trois droites *d*, *d'*, QP, engendre une quadrique dont l'intersection avec le plan α donne le lieu du point C.

Ce lieu passe évidemment par Q et par les points de rencontre de α avec les droites *d*, *d'*. Si ces trois points étaient en ligne droite, il se composerait de deux droites.

Les points B et A décrivent également des coniques.

Théorème II. — *Un triangle* ABC *se déforme de manière que le côté* AB *pivote dans un plan donné* α *autour d'un point fixe* Q;

le point B *décrit une droite donnée* d *du plan* α; *le côté* BC *tourne autour d'un point donné* P; *le point* C *se meut dans un plan donné* β; *enfin, le côté* AC *doit rencontrer une droite donnée* d'. *Dans ces conditions, le point* A *décrit une conique.*

Pour obtenir un point du lieu (A), il suffit de mener le plan P*d*, qui coupe β suivant la droite d''; alors un plan quelconque mené par la droite QP rencontre d en un point B, d' en un point D et d'' en un point C, et la droite CD coupera α en un point A. Le triangle ABC satisfait aux conditions de la question.

La droite AC qui s'appuie sur les droites QP, d' et d'' engendre une quadrique dont l'intersection avec le plan α constitue le lieu cherché.

Théorème III. — *Un triangle* ABC *se déforme de manière que les côtés* AB, AC *passent constamment par deux points donnés* P, Q; *les sommets* B, C *se déplacent dans deux plans donnés* β, γ; *enfin, le côté* BC *s'appuie toujours sur une droite donnée* d. *Le sommet* A *décrit alors une quadrique.*

En effet, un plan quelconque α mené par la droite PQ rencontre les plans β, γ suivant deux droites b, c et la droite d en un point D. Ce plan contient une infinité de triangles ABC qu'on obtient en menant dans ce plan par D une droite quelconque qui coupe b en B, c en C, et en traçant les droites BP, CQ qui se rencontrent en A. Donc, d'après le théorème de Maclaurin et Braikenridge, le point A décrit dans le plan α une conique; lorsque α tourne autour de PQ, la conique engendre une quadrique.

Théorème IV. — *Un triangle* ABC *se déforme de manière que les côtés* AB, BC *passent constamment par deux points donnés* P, Q; *les sommets* B, C *se meuvent dans deux plans donnés* β, γ, *et le côté* AC *s'appuie sur une droite fixe* d. *Le sommet* A *décrit alors une quadrique.*

En effet, menons par la droite PQ un plan quelconque α, qui

coupe les plans β, γ suivant les droites b, c et la droite d en D ; alors une droite quelconque tracée par Q dans le plan α coupe b, c en des points B, C et les droites BP, CD se rencontrent en un point A. Le triangle ABC satisfait aux conditions de la question. En appliquant le théorème de Maclaurin et Braikenridge, on voit immédiatement que le lieu du point A dans le plan α est une conique ; par suite, lorsque α tourne autour de PQ, le point A engendre une quadrique.

SUR

QUELQUES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

DANS L'ESPACE

PAR

NEUBERG et DEGUELDRE

SUR

QUELQUES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

DANS L'ESPACE

Les livraisons de mars et d'avril 1908 de *Mathesis* ont proposé, sous les nos 1668 et 1664, les questions suivantes :

Problème A. — *Le lieu des projections d'un point fixe sur les génératrices d'un même système d'une quadrique réglée est une biquadratique gauche.* (Degueldre.)

Problème B. — *On considère deux droites* a, b *et deux points* P, Q *quelconques dans l'espace. Un plan variable mené par la droite* PQ *rencontre* a *en* A *et* b *en* B. *Les droites* PA *et* QB *se coupent en un point* C.

1° *Le lieu de l'intersection des plans menés par les sommets du triangle* ABC *perpendiculairement aux côtés opposés est une surface du quatrième ordre à plan directeur;*

2° *Les hauteurs* AA′, BB′ *du triangle* ABC *engendrent des surfaces du troisième ordre, tandis que la hauteur* CC′ *engendre une surface du cinquième ordre.* (Degueldre.)

Faute d'avoir examiné l'espèce de la biquadratique et d'avoir envisagé le cas où le point fixe est sur la quadrique, on n'avait pas tenu compte d'une diminution que devait subir l'ordre de la

surface engendrée par CC'. Une étude plus approfondie de ces questions nous a donné d'autres résultats très intéressants que nous publions dans la présente note, avec la solution complète des deux problèmes ci-dessus.

1. La solution du problème A peut se déduire de la question suivante :

Étant donnés une conique Σ, *un point* P *et une droite quelconque* b, *soit* D *le point de rencontre de* b *avec le plan perpendiculaire en* C *à la droite qui joint* P *à un point quelconque* C *de* Σ, *trouver l'ordre de la surface* U *engendrée par la droite* CD ≡ *u*.

Appelons π le plan de Σ, et B le point π*b*. Par tout point de Σ, il passe, en général, une seule droite *u* (*). Mais par un point quelconque D de *b*, il passe quatre droites *u* unissant D aux quatre points communs à Σ et à la sphère de diamètre PD; *b* est donc une *droite quadruple* de U. Un plan quelconque λ mené par *b* coupe U suivant six droites dont quatre coïncident avec *b* et dont deux autres passent par les points de rencontre de Σ avec λ. La surface U est donc du 6e ordre. Cette conclusion résulte aussi de ce que le plan π coupe U suivant la conique Σ et suivant quatre droites *u* joignant B aux points d'intersection de Σ avec la sphère de diamètre PB.

La surface U n'est plus que du cinquième ordre lorsque l'un des points B ou P est situé sur Σ. En effet, si *b* rencontre Σ, un plan λ mené par *b* contient la droite quadruple *b* et une seule droite *u* passant par le second point de rencontre de λ avec Σ. Si P est situé sur Σ, il ne passe plus par un point quelconque D de *b* que trois droites *u* aboutissant aux trois points d'intersections autres que P, de Σ avec la sphère de diamètre PD; *b* est maintenant une *droite triple* de U.

(*) Il y a exception pour les *seconds* points de rencontre de Σ avec les droites *u* passant par B.

Lorsque les deux points P et B sont sur Σ, la surface U est du quatrième ordre.

2. Considérons maintenant le lieu des projections d'un point fixe P sur les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde réglé V. Désignons cette courbe par Γ et appelons-la *podaire de* P *par rapport à* V.

Pour en trouver l'ordre, cherchons le nombre des points où elle rencontre un plan quelconque π mené par P. Soient Σ la conique, A et B les points où π coupe V et deux génératrices fixes a et b du second système de V. En un point quelconque C de Σ élevons un plan perpendiculaire à la droite PC et rencontrant b en D; la droite CD $\equiv u$ engendrera une surface U du cinquième ordre. Par chacun des points d'intersection de a avec U, il passe une génératrice de U, qui est en même temps génératrice de V comme ayant avec V trois points communs sur b, a et Σ; toutefois, il faut excepter la génératrice de U qui passe par A.

On obtient ainsi dans le plan π quatre points de Γ; donc cette courbe est du quatrième ordre. La même conclusion subsiste encore lorsque P est situé sur V, bien que la surface U ne soit plus que du quatrième ordre; car le point P appartient à une génératrice de U qui ne s'appuie pas nécessairement sur a.

Un plan tangent à V contient une génératrice g du premier système et une génératrice h du second système; il rencontre Γ en quatre points dont un seul appartient à g; les trois autres sont donc situés sur h. Il résulte de là que Γ est une *biquadratique de seconde espèce.*

3. Voici un autre procédé pour reconnaître l'ordre de Γ.

Les notations restant les mêmes, menons en C un plan perpendiculaire à la génératrice du premier système de V qui y passe; soient q sa trace sur π, p la droite PC, r la parallèle à q par P. Lorsque C parcourt la conique Σ, p et r engendrent deux faisceaux superposés qui sont liés par une correspondance (2, 2).

En effet, un rayon p coupe Σ en deux points à chacun desquels il correspond une droite r. De même, à une droite r correspondent deux droites q et par suite deux droites p. Car les plans menés par P perpendiculairement aux génératrices de V enveloppent un cône W, supplémentaire du cône directeur de V; par r, on peut mener à W deux plans tangents; les génératrices du premier système de V perpendiculaires à ces plans rencontrent Σ en des points que l'on joindra à P. Cela posé, les coïncidences de la correspondance (2, 2) déterminent quatre génératrices de V telles que les projections de P sur ces droites appartiennent à Σ. Donc Γ est du quatrième ordre.

Lorsque P est situé sur Σ, p et r sont liés par une correspondance (2, 1) dont les trois coïncidences déterminent trois points de Σ appartenant à Γ; mais P est un quatrième point de Γ qui ne se rapporte pas à une coïncidence.

Remplaçons l'hyperboloïde V par un paraboloïde V'. Les plans menés en P perpendiculairement aux génératrices du premier système de V' forment un faisceau W' dont l'axe est perpendiculaire au premier plan directeur. A une droite r correspond une seule génératrice de V' perpendiculaire au plan de W' mené par r. La correspondance entre p et r ne possède plus que trois coïncidences et le lieu Γ est une cubique gauche. (Reye, *Geom. der Lage*, t. II, exercice 128.)

La même conclusion subsiste lorsque P est situé sur V', bien que p et r soient liés par une correspondance (1, 1); car le point P appartient à Γ sans se rapporter à une coïncidence.

4. On peut déterminer directement l'ordre du cône A engendré par la perpendiculaire l abaissée de P sur une génératrice quelconque g d'une quadrique réglée.

En effet, désignons par α le plan Pg, par γ le plan mené par P perpendiculairement à g. Lorsque g engendre l'hyperboloïde V, le plan α enveloppe un cône φ circonscrit à V, et le plan γ enveloppe un cône W. Les plans α et γ rencontrent un plan quelconque π mené par P suivant deux droites a et c qui sont liées par une correspondance (2, 2). En effet, par une droite

donnée a, on peut mener deux plans tangents au cône φ; les plans tangents correspondants du cône W coupent π suivant deux droites dont chacune peut être considérée comme l'homologue de a. On verrait de même qu'à une droite donnée c, on peut associer deux droites a. Les quatre coïncidences de la correspondance (2, 2) sont des génératrices de Λ. Donc tout plan π mené par P contient quatre génératrices de Λ.

Cependant, si le point P est situé sur V à l'intersection de la génératrice g' du premier système avec la génératrice h' du second système, le cône φ est remplacé par un faisceau de plans d'axe h', et le cône Λ est seulement du troisième ordre; h' est une génératrice double de Λ, car elle est perpendiculaire à deux génératrices du premier système de V.

Si l'hyperboloïde V est remplacé par un paraboloïde V′, le cône W est remplacé par un faisceau de plans, et le cône Λ n'est plus que du troisième ordre; il devient même du second ordre lorsque P est situé sur V′. (Reye, *loc. cit.*)

5. On sait qu'une biquadratique gauche de seconde espèce se présente souvent comme intersection partielle d'une quadrique avec une surface cubique qui a deux droites communes avec la quadrique.

Voici comment on trouve des surfaces cubiques passant par la courbe Γ.

Soient g une génératrice variable du premier système d'un hyperboloïde V, a une génératrice fixe du second système, γ le plan mené par P perpendiculairement à g, f l'intersection des plans ag et γ. La droite f engendre une surface cubique F passant par Γ.

En effet, désignons par I, J les points de rencontre des plans ag, γ avec une droite quelconque p; il est facile de voir que ces points sont liés par une correspondance (2, 1) dont les trois coïncidences sont des points où une droite f rencontre p.

La droite a est une droite double de la surface F. Car par un point quelconque A de a, on peut mener deux plans γ (tangents au cône W); les génératrices du premier système de V perpen-

dieulaires à ces plans déterminent avec a deux plans qui coupent les deux plans γ menés par A suivant deux droites f passant par A. On peut donc dire que la surface F a deux droites communes avec V.

L'ordre de la surface F résulte aussi de ce que tout plan mené par a contient la droite double a et une droite simple f.

Une génératrice de F passe par P, car le plan aP contient une génératrice du premier système de V.

Les raisonnements précédents sont encore applicables lorsque P est situé sur l'hyperboloïde V.

Si l'on substitue à V un paraboloïde V′, les points I et J sont liés par une correspondance (1, 1); la surface F est maintenant une quadrique réglée qui passe par a. De là, on peut conclure de nouveau que la courbe Γ est une cubique gauche.

6. Pour traiter le problème A par le calcul, considérons une quadrique réglée comme le lieu d'une droite g qui joint les points homologues A, B de deux ponctuelles projectives ayant pour supports les droites a, b.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les coordonnées rectangulaires de deux points fixes A_1, A_2 et du point variable A de a, et soient (x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2), (x_3, y_3, z_3) celles des points homologues B_1, B_2, B de b. Nous pouvons poser

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda};$$

$$x'_3 = \frac{x'_1 + \lambda m x'_2}{1 + \lambda m}, \quad y'_3 = \frac{y'_1 + \lambda m y'_2}{1 + \lambda m}, \quad z'_3 = \frac{z'_1 + \lambda m z'_2}{1 + \lambda m},$$

où m est une constante et λ un paramètre variable.

Désignons par α, β, γ les coordonnées de P et par x, y, z celles de la projection M de P sur g; ces dernières sont de la forme

$$x = \frac{x_3 + \rho x'_3}{1 + \rho}, \quad y = \frac{y_3 + \rho y'_3}{1 + \rho}, \quad z = \frac{z_3 + \rho z'_3}{1 + \rho}, \qquad (1)$$

ρ étant un facteur inconnu.

Exprimons que les droites PM et AB sont rectangulaires ; il vient

$$(x-\alpha)(x_3-x'_3)+(y-\beta)(y_3-y'_3)+(z-\gamma)(z_3-z'_3)=0. \quad (2)$$

En remplaçant x, y, z par les valeurs (1), on trouve

$$\Sigma[x_3-\alpha+\rho(x'_3-\alpha)](x_3-x'_3)=0,$$

d'où l'on tire

$$\rho=-\frac{\Sigma(x_3-\alpha)(x_3-x'_3)}{\Sigma(x'_3-\alpha)(x_3-x'_3)}. \quad (3)$$

Si l'on porte cette valeur de ρ dans les formules (1), on obtient

$$x=\frac{x_3\Sigma(x'_3-\alpha)(x_3-x'_3)-x'_3\Sigma(x_3-\alpha)(x_3-x'_3)}{\Sigma(x'_3-\alpha)(x_3-x'_3)-\Sigma(x_3-\alpha)(x_3-x'_3)},\ldots$$

le signe sommatoire Σ s'étendant aux lettres x, y, z.

Enfin, remplaçons $x_3, y_3, z_3, x'_3, y'_3, z'_3$ par leurs valeurs ; nous aurons des expressions de la forme

$$x=\frac{\varphi_1(\lambda)}{\varphi(\lambda)},\quad y=\frac{\varphi_2(\lambda)}{\varphi(\lambda)},\quad z=\frac{\varphi_3(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

où $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des polynomes du quatrième degré en λ. Toutefois, si $m=1$, ces fonctions ne sont plus que du troisième degré.

Il résulte de là que la courbe Γ est du quatrième ordre lorsqu'il s'agit d'un hyperboloïde, et qu'elle est une cubique gauche dans le cas d'un paraboloïde.

7. Cherchons encore l'équation du cône Λ engendré par la projetante PM.

Cette droite est représentée par l'équation (2) du plan mené par P perpendiculairement à AB et par celle du plan PAB, qui est

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & x_1+\lambda x_2 & x'_1+\lambda m x'_2 \\ y & \beta & y_1+\lambda y_2 & y'_1+\lambda m y'_2 \\ z & \gamma & z_1+\lambda z_2 & z'_1+\lambda m z'_2 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda m \end{vmatrix}=0. \quad (4)$$

Ordonnons les équations (2) (après remplacement des valeurs de $x_3, y_3, \ldots$) et (4) par rapport à λ; nous aurons respectivement

$$Pm\lambda^2 + (Qm + R)\lambda + S = 0, \tag{5}$$

$$P'm\lambda^2 + (Q'm + R')\lambda + S' = 0. \tag{6}$$

Les équations $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$, $S' = 0$ représentent les plans PA_2B_2, PA_1B_2, PA_2B_1, PA_1B_1; les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ représentent les plans menés par le point P perpendiculairement aux droites A_2B_2, A_1B_2, A_2B_1, A_1B_1.

L'élimination de λ entre les équations (5) et (6) conduit à l'équation du cône Λ, à savoir :

$$[m(PQ' - P'Q) + (PR' - P'R)][m(QS' - Q'S) + (RS' - R'S)] = m(PS' - P'S)^2.$$

Ce cône est donc généralement du quatrième ordre.

Cependant, lorsque $m = 1$, l'équation (2) est

$$\Sigma(x - \alpha)[x_1 - x_1' + \lambda(x_2 - x_2')] = 0,$$

ou

$$P\lambda + S = 0,$$

et Λ n'est plus que du troisième ordre (*).

Lorsque P est situé sur l'hyperboloïde V, on peut le supposer en A_1; alors, en retranchant la deuxième colonne de (4) de la troisième et divisant ensuite par λ, on réduit l'équation (4) au

---

(*) L'abaissement de l'ordre de Λ peut s'expliquer ainsi : Lorsque $m \gtrless 1$, on passe de (2) à (5) en multipliant par $(1 + \lambda)(1 + \lambda m)$; mais dans l'hypothèse $m = 1$, on chasse les dénominateurs de (1) en multipliant simplement par $(1 + \lambda)$, de sorte que l'équation (5) doit renfermer en trop le facteur $1 + \lambda$. L'hypothèse $\lambda = -1$ réduit l'équation (4) à celle du plan mené par P parallèlement aux droites A_1B_1, A_2B_2.

Géométriquement, la perpendiculaire abaissée de P sur la génératrice à l'infini du premier système du paraboloïde se trouve dans le plan mené par P parallèlement au premier plan directeur, mais sa direction est indéterminée.

premier degré en λ. Il résulte de là que dans ce cas le cône Λ est du troisième ordre.

Enfin, lorsqu'il s'agit d'un paraboloïde passant par P, les deux équations (5) et (6) se réduisent au premier degré en λ, et Λ n'est plus que du second ordre.

8. Il est encore facile de trouver l'équation de la surface F. Le plan ag a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x'_1 + \lambda m x'_2 \\ y & y_1 & y_2 & y'_1 + \lambda m y'_2 \\ z & z_1 & z_2 & z'_1 + \lambda m z'_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 + \lambda m \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Elle est du premier degré en λ. Donc en éliminant λ entre (5) et (7), on obtient pour F une équation du troisième degré ou du second suivant que $m \gtrless 1$ ou $= 1$.

9. Revenons au cône Λ engendré par la perpendiculaire PM abaissée d'un point fixe P sur une génératrice quelconque g du premier système d'un hyperboloïde V.

La droite PM rencontre V en un second point M′ dont le lieu géométrique est également une biquadrique de seconde espèce Γ' ; car l'intersection complète de Λ et V est du huitième ordre, et une génératrice du second système de V rencontre Λ en quatre points dont trois appartiennent à Γ et le quatrième nécessairement à Γ'.

Les tangentes à V passant par P sont les génératrices d'un cône quadratique Δ ; soit PX une génératrice commune à Δ et Λ. Le point de contact X de cette droite avec V est commun aux deux courbes Γ, Γ'. Il est facile de voir que Δ et Λ s'y touchent. Il résulte de là que Δ et Λ se touchent suivant quatre génératrices et que Γ et Γ' ont quatre points communs.

Lorsque P est sur V, le cône Λ est seulement du troisième ordre et son intersection complète avec V se compose de la biquadratique Γ et d'une droite double qui est la génératrice du second mode de V passant par P.

Dans le cas d'un paraboloïde V', le cône A est du troisième ordre et son intersection complète avec V' se compose de deux cubiques gauches. Cependant, lorsque P est situé sur V', A n'est plus que du second ordre et son intersection complète avec V se compose d'une cubique gauche et de la génératrice du second mode de V' passant par P.

11. Appelons A_1 le cône des perpendiculaires abaissées de P sur les génératrices du second système de l'hyperboloïde V, Γ_1 et Γ'_1 les biquadratiques suivant lesquelles il coupe V.

Soit M le pied d'une normale abaissée de P sur V; la droite PM étant perpendiculaire aux deux génératrices de V qui passent par M, ce point appartient aux deux podaires Γ, Γ_1; le second point de rencontre de PM avec V est commun aux courbes Γ', Γ'_1. Les six normales menées de P à V donnent donc six points communs à Γ et Γ_1 et six points communs à Γ' et Γ'_1.

On peut trouver deux cordes NN' de V qui passent par P et rencontrent normalement en N une génératrice g du premier système de V et en N' une génératrice h du second système. Car les droites g et h étant dans un même plan et perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles; par suite, le plan gh touche le cône asymptote de V. Menons donc par P les deux plans tangents à ce cône et abaissons de P des perpendiculaires sur les génératrices de contact. Nous obtenons ainsi deux points communs à Γ et Γ'_1 et deux autres points communs à Γ' et Γ_1.

Si l'on considère un paraboloïde V', les cônes A, A_1 sont du troisième ordre et rencontrent V' suivant des cubiques gauches Γ et Γ', Γ_1 et Γ'_1. Les pieds des cinq normales menées de P à V' sont des points communs aux deux podaires Γ et Γ_1. Il est facile de voir qu'il n'existe pas de corde passant par P et rencontrant normalement en l'une de ses extrémités une génératrice du premier système de V' et en l'autre extrémité une génératrice du second système.

Les développements qui vont suivre se rapportent d'abord au problème B, ensuite à des questions plus générales. Nous y ferons usage du principe suivant :

Étant données sur deux droites gauches a, b *deux ponctuelles* [A], [B] *qui sont liées par une correspondance* (m, n), *la droite qui joint deux points homologues* A, B *engendre une surface d'ordre* m + n.

Pour le démontrer, soient E, E′ les points de rencontre d'une droite quelconque p avec les plans aB, bA ; si E coïncidait avec E′, ce serait un point de la surface. Or, si l'on se donne le point E, le point B sera déterminé et il y aura m points correspondants A et aussi m points correspondants E′. On verrait de même qu'à un point E′ correspondent n points E. Il existe donc entre les points E, E′ une correspondance (n, m) qui présente $m + n$ coïncidences.

D'après le nombre de génératrices partant d'un point de a ou b, nous dirons que ces droites sont d'ordre n ou m par rapport à la surface.

12. Dans le problème B, le point C décrit l'intersection c des plans aP, bQ et engendre une ponctuelle [C] perspective avec les ponctuelles [A], [B]. La droite AB engendre généralement un hyperboloïde V.

Il existe entre le point C et le point de rencontre K de la droite PQ avec la hauteur CC′ une correspondance (3, 1) En effet, à un point C de c correspond un seul point K ; mais lorsqu'on se donne K, la droite CC′ est une génératrice du cône des perpendiculaires abaissées sur les génératrices d'un même système de V. Comme PQ appartient à V, ce cône, qui est du troisième ordre (**5**), est coupé par le plan Kc suivant trois droites que l'on peut prendre pour la hauteur CC′. Il en résulte que CC′ engendre une surface du quatrième ordre dont c est une droite simple et PQ une droite triple.

Si les droites a, b, PQ étaient parallèles à un même plan, la droite AB engendrerait un paraboloïde V′ et les perpendicu-

laires abaissées du point K de V′ sur les génératrices d'un même système appartiendraient à un cône du second ordre ; la surface [CC′] ne serait plus que du troisième ordre et aurait une droite double PQ.

Nous supposerons dans la suite que AB engendre un hyperboloïde V.

13. Appelons α, β, γ les plans menés par les points A, B, C perpendiculairement aux droites BC, CA, AB, et désignons par R, S les points *ac*, *bc*.

Pour trouver la hauteur AA′, on peut projeter A en A_1 sur le plan *b*Q, et A_1 en A′ sur BC ; le point A_1 décrit une ponctuelle qui est semblable à la ponctuelle [A] et par suite projective avec le faisceau engendré par la droite BC. La ponctuelle $[A_1]$ est donc également projective avec la ponctuelle marquée sur la droite de l'infini par la droite A_1A' perpendiculaire à BC. On en conclut que la droite A_1A' enveloppe une parabole π_a qui touche la droite RA_1 et la perpendiculaire élevée en R sur la droite RQ dans le plan *b*Q.

Le plan $AA_1A' \equiv \alpha$ enveloppe le cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires sur le plan *b*Q et s'appuient sur la parabole π_a.

Le point A′ décrit la podaire π'_a de Q par rapport à π_a. Cette courbe est une cubique qui a un point double en Q, avec deux tangentes perpendiculaires aux tangentes menées par Q à la parabole π_a ; elle passe par le point R.

14. *La droite* AA′ *engendre une surface du troisième ordre.*

Car un plan λ mené par *a* contient la droite simple *a* de cette surface et deux génératrices rectilignes menées par les deux points autres que R où le plan λ rencontre la courbe π'_a.

Pour trouver l'ordre de la surface [AA′], on pourrait aussi observer que *a* en est une droite simple et PQ une droite double : par un point quelconque F de la droite PQ, on peut mener deux droites AA′, A′ étant l'un des points où la ligne

d'intersection des plans F*a*, Q*b* rencontre la sphère de diamètre QF.

Les raisonnements précédents s'appliquent également à la hauteur BB'.

15. *Le point* C' *engendre une ligne du cinquième ordre.*

En effet, la droite PQ contient quatre points C'. Car, soient K, K' les points où cette droite rencontre la hauteur CC' et le côté AB d'un triangle ABC de la question ; ces points sont liés par une correspondance (1, 3) : si l'on se donne K', la droite AB est l'intersection des plans K'*a*, K'*b* ; si l'on donne K, il existe trois droites CC' passant par K et par suite trois droites correspondantes AB. Les quatre coïncidences de cette correspondance donnent quatre points du lieu [C'], et comme un plan quelconque mené par PQ donne un cinquième point non situé sur PQ, le lieu est du cinquième ordre.

16. *Les plans* γ, en nombre simplement infini, *enveloppent une développable de la troisième classe.*

En effet, on a vu que par un point quelconque K de la droite PQ, il passe trois lignes CC' et par suite trois plans γ. On peut aussi observer qu'il passe par la droite *c* deux plans γ ; car la droite *c* est perpendiculaire à deux génératrices du cône directeur de V, situées dans le plan mené par le sommet de ce cône perpendiculairement à *c*, et les plans menés par *c* normalement à ces génératrices du cône sont normaux aux positions correspondantes de la droite AB. Il résulte de là que par un point quelconque de *c*, il passe trois plans γ.

17. La ligne d'intersection HH' des plans α, β, γ étant perpendiculaire à PQ engendre une surface à plan directeur. *Cette surface est du quatrième ordre.*

Car entre les plans α, β qui enveloppent deux cylindres du second degré, il existe une correspondance (1, 1) ; ces plans rencontrent une droite quelconque *p* en deux points liés par une

correspondance (2, 2) dont les quatre coïncidences sont les points de rencontre de p avec la surface [HH′].

Les plans α et γ rencontrent p en deux points liés par une correspondance (3, 2), ce qui ferait supposer que la surface [HH′] est du cinquième ordre. Mais au point R de c, les points A et C coïncident, et les plans α et γ sont tous deux perpendiculaires à la droite RQ, de manière qu'il se détache de la surface [HH′] un plan.

18. Cherchons le lieu de l'orthocentre H du triangle ABC.

D'abord, la droite PQ contient quatre points H; car entre les points de rencontre h, h' de PQ avec les droites AA′, BB′, il existe une correspondance (2, 2), puisque de chaque point de PQ il part deux droites AA′ et deux droites BB′ (**14**). Les quatre coïncidences de cette correspondance sont des points H. Un plan quelconque mené par PQ contient donc quatre points H sur PQ et un cinquième extérieur à PQ. Par suite, *le point* H *engendre une courbe du cinquième ordre.*

Nous allons maintenant traiter les mêmes questions en considérant sur trois droites gauches *quelconques* a, b, c trois ponctuelles projectives *quelconques* [A], [B], [C]. Conservant les notations précédentes, nous désignerons par AA′, BB′, CC′, H les hauteurs et l'orthocentre du triangle ABC, par α, β, γ les plans menés par A, B, C perpendiculairement aux droites BC, CA, AB; enfin, par V l'hyperboloïde engendré par la droite AB. Pour abréger, nous représenterons par g la droite AB et par δ le plan ABC.

19. *Le plan* ABC *enveloppe une développable de la troisième classe* (théorème connu).

En effet, il passe par un point quelconque P trois plans δ. Car si par une position quelconque de AB, on mène le plan correspondant δ et le plan ABP qui coupe c en C_1, les points C et C_1

sont liés par une correspondance (2, 1) : Le point C détermine AB et ensuite C_1; mais le point C_1 détermine deux plans ABP qui sont les deux plans tangents menés par la droite PC_1 à l'hyperboloïde V, de sorte que C_1 est l'homologue de deux points C. Les trois coïncidences de la correspondance (2, 1) sont trois points de C tels que les plans correspondants δ passent par P.

20. *Le plan* γ *enveloppe une développable de la troisième classe.*

Car soit C_2 le point de rencontre de c avec le plan mené par un point donné P et normal au côté AB d'un triangle ABC. Si l'on se donne C, le point C_2 s'en suit; si l'on donne C_2, on peut prendre pour le plan PAB l'un des deux plans tangents menés par PC_2 au cône de sommet P et supplémentaire du cône directeur de V. Il existe donc entre C et C_2 une correspondance (2, 1), dont les trois coïncidences déterminent trois plans δ tels que les plans correspondants γ passent par P.

21. *La hauteur* CC′ *engendre une surface du sixième ordre.*

Pour démontrer cette proposition, menons en chaque point C de c les plans δ et γ et soient h, h' leurs points de rencontre avec une droite donnée p. Par un point h de p passent trois plans δ (**19**) à chacun desquels correspond un plan γ; de même par un point h' de p passent trois plans γ (**20**) auxquels correspondent trois plans δ. Il résulte de là qu'il existe entre h et h' une correspondance (3, 3) dont les six coïncidences sont les points de rencontre de p avec la surface [CC′].

22. *Le lieu du point* C′ *est une courbe du cinquième ordre.*

Il est d'abord évident qu'aucun point du lieu ne se trouve sur c. Un plan quelconque λ mené par c coupe la surface [CC′], qui est du sixième ordre, suivant la droite c et cinq droites CC′, sur chacune desquelles il y a un point C′. Donc C′ décrit une quintique.

Soit f une génératrice de V du même système que a et b. Le plan mené par f et une génératrice $AB \equiv g$ du premier système contient cinq points de la courbe [C']; un seul de ces points appartenant à AB, les quatre autres appartiennent à f.

La surface [CC'] est coupée par l'hyperboloïde V suivant une courbe du douzième ordre. Le second point de rencontre de la droite CC' avec V décrit donc une courbe du septième ordre. Comme les droites f et g coupent la surface [CC'] en six points, la courbe du septième ordre a deux points sur f et cinq points sur g.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une ponctuelle rectiligne projective avec un système de génératrices d'un hyperboloïde V, *la projection* C' *d'un point* C *de la ponctuelle sur la génératrice correspondante de* V *décrit une courbe du cinquième ordre dont les génératrices du second système de* V *sont des quadrisécantes. La projetante* CC' *engendre une surface du sixième ordre; le lieu de son second point de rencontre avec* V *est une courbe du septième ordre qui a cinq points sur chaque génératrice du premier système de* V *et deux points sur chaque génératrice du second système.*

On peut encore établir l'ordre de la courbe [C'] en cherchant directement le nombre de ses points situés sur a; cela revient à déterminer le nombre des triangles ABC qui sont rectangles en A ou dont l'orthocentre est sur a.

A cet effet, A, B, C étant trois points homologues quelconques de a, b, c, appelons A_1 l'un des points dintersection de a avec la sphère de diamètre BC. Le triangle A_1BC sera rectangle en A_1 et les extrémités de l'hypoténuse sont des points homologues de b et c. A un point A correspondent deux points A_1. A un point A_1 correspondent également deux points A. Car le plan perpendiculaire en A_1 à la droite joignant A_1 à un point quelconque de la ponctuelle [B] engendre un faisceau projectif avec cette ponctuelle et, par suite, marque sur c une ponctuelle $[C_1]$ projective avec la ponctuelle [C]. Les deux points doubles des ponctuelles projectives [C] et $[C_1]$ sont des positions de C telles

qu'avec leurs homologues de la ponctuelle [B] et le point A_1, elles déterminent deux triangles rectangles en A_1 (*) et dont les extrémités de l'hypoténuse se correspondent dans les ponctuelles projectives [B], [C]. Il résulte de là que les points A et A_1 sont liés par une correspondance (2, 2) dont les quatre coïncidences appartiennent à la courbe [C']. Cela posé, un plan quelconque mené par *a* contient quatre points de cette courbe sur *a* et un cinquième sur la génératrice AB de V située dans ce plan.

Par analogie, chacune des droites *b* et *c* contient quatre orthocentres (**).

23. *L'orthocentre* H *du triangle* ABC *décrit une courbe du neuvième ordre.*

En effet, un plan passant par *c* contient cinq droites CC' et par suite cinq orthocentres en dehors des quatre situés sur *c*.

(*) La droite BC_1 engendre un hyperboloïde et le plan de l'angle droit BA_1C_1 enveloppe un cône quadratique (théorème connu).

(**) La droite *c* rencontre la surface (AA') en six points dont quatre sont des orthocentres et dont les deux autres sont obtenus en menant les génératrices AB de V qui passent par les points d'intersection de *c* avec V; dans les deux triangles ABC correspondants, les hauteurs AA' et BB' rencontrent *c*.

RELATIONS ENTRE LES VOLUMES

DE

CERTAINS TÉTRAÈDRES

par J. NEUBERG

RELATIONS ENTRE LES VOLUMES

DE

CERTAINS TÉTRAÈDRES

Il m'a paru intéressant de chercher, dans l'espace, les analogues des propositions suivantes qui ont été traitées dans les *Wiskundige Opgaven* (Deel IX, p. 285) et dans *Mathesis* (1907, p. 17) :

Soient A_1, B_1, C_1 *les points de rencontre des côtés d'un triangle* ABC *avec une transversale quelconque. On mène par un point quelconque* O *les droites* OA′, OB′, OC′ *équipollentes aux droites* AA_1, BB_1, CC_1. *Démontrer que l'aire* A′B′C′ *est double de l'aire* ABC. (H. Van Aubel.)

Si A_1, B_1, C_1 *sont trois points quelconques pris sur les côtés du triangle* ABC, *on a*

$$A'B'C' = 2ABC + A_1B_1C_1.$$

(J. Van de Griend.)

Je considère deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ et je désigne par x_r, y_r, z_r les coordonnées de A_r par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et par α_r, β_r, γ_r celles de B_r. Soient OC_1, OC_2, OC_3, OC_4 des droites équipollentes aux droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4; les coordonnées de C_r seront $\alpha_r - x_r$, $\beta_r - y_r$, $\gamma_r - z_r$. Par suite, si A, B, C représentent

les volumes des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, soumis à la règle des signes, on a

$$6A = |\, x_1\ y_1\ z_1\ 1\,|, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$6B = |\, \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ 1\,|, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$6C = |\, \alpha_1 \quad x_1\ \beta_1 - y_1\ \gamma_1 - z_1\ 1\,|, \quad \ldots \quad (3)$$

en convenant de n'écrire que la première ligne d'un déterminant lorsque les autres s'en déduisent par le changement de l'indice des lettres.

Le déterminant (3) peut se décomposer en huit autres; en désignant par D et E les sommes

$$|\, \alpha_1\ y_1\ z_1\ 1\,| + |\, x_1\ \beta_1\ z_1\ 1\,| + |\, x_1\ y_1\ \gamma_1\ 1\,|,$$
$$|\, x_1\ \beta_1\ \gamma_1\ 1\,| + |\, \alpha_1\ y_1\ z_1\ 1\,| + |\, \alpha_1\ \beta_1\ z_1\ 1\,|,$$

on peut écrire

$$6C = 6B - 6A + D - E. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Appelons X_r, Y_r, Z_r, U_r les mineurs de $|\, x_1\ y_1\ z_1\ 1\,|$ relatifs aux éléments de la r^e ligne; alors

$$|\, \alpha_1\ y_1\ z_1\ 1\,| = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha_4X_4,$$
$$|\, x_1\ \beta_1\ z_1\ 1\,| = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \beta_3Y_3 + \beta_4Y_4,$$
$$|\, x_1\ y_1\ \gamma_1\ 1\,| = \gamma_1Z_1 + \gamma_2Z_2 + \gamma_3Z_3 + \gamma_4Z_4.$$

D'où l'on conclut

$$D = (\alpha_1X_1 + \beta_1Y_1 + \gamma_1Z_1) + (\alpha_2X_2 + \beta_2Y_2 + \gamma_2Z_2) + \cdots$$

Supposons maintenant les points B_1, B_2, B_3, B_4 situés respectivement dans les plans $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$; nous aurons, par exemple,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\alpha_1X_1 + \beta_1Y_1 + \gamma_1Z_1 + U_1 = 0.$$

Il en résulte

$$D = -(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) = -6A. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Donc

$$6C = 6B - 12A - E. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Les hypothèses suivantes donnent des résultats remarquables.

a) Le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est inscrit au tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$; alors par analogie avec l'égalité (4), on a $E = -6B$. Donc, si les deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ sont, chacun, inscrits à l'autre (*Tétraèdres de Möbius*), l'égalité (5) devient

$$C = 2(B - A).$$

Ainsi, *étant donnés deux tétraèdres de Möbius* $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, *si l'on mène les droites* OC_1, OC_2, OC_3, OC_4 *équipollentes aux droites* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, *le volume du tétraèdre* $C_1C_2C_3C_4$ *est double de la différence des volumes des tétraèdres donnés.*

b) B_1, B_2, B_3, B_4 sont les points de rencontre des faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ avec une même transversale. Dans ce cas, on a $B = 0$, $E = 0$; en effet, le déterminant $|\alpha_1, \beta_1, z_1, 1|$, par exemple, représente six fois le volume d'un tétraèdre dont les sommets se projettent sur le plan xy aux mêmes points que B_1, B_2, B_3, B_4, et ces projections sont en ligne droite. On a donc

$$C = -2A.$$

c) Les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 concourent en un même point O dont les coordonnées barycentriques par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont m_1, m_2, m_3, m_4.

Pour simplifier, supposons $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1$. Alors

$$\frac{OC_2C_3C_4}{OA_2A_3A_4} = \frac{A_2B_2}{OA_2} \cdot \frac{A_3B_3}{OA_3} \cdot \frac{A_4B_4}{OA_4} = \frac{1}{1 - m_2} \cdot \frac{1}{1 - m_3} \cdot \frac{1}{1 - m_3},$$

$$\frac{OA_2A_3A_4}{A} = m_1;$$

donc

$$OC_2C_3C_4 = A\frac{m_1}{(1-m_1)(1-m_3)(1-m_4)}, \ldots$$

Par conséquent

$$\frac{C}{A} = \Sigma\frac{m_1}{(1-m_2)(1-m_3)(1-m_4)}.$$

Par exemple, si B_1, B_2, B_3, B_4 sont les centres de gravité des faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, on a

$$C = \frac{64}{27}A.$$

SUR

LA VARIATION DES LATITUDES

PAR

Henry JANNE

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
INGÉNIEUR CIVIL DES MINES
RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

AVERTISSEMENT

Dans le Travail que nous livrons aujourd'hui à la publicité, il a toujours été très loin de notre pensée de vouloir donner une étude synthétique complète de tout ce qui a été écrit, tant au point de vue de la théorie que de l'observation, au sujet du phénomène si intéressant de la *variation des latitudes*, encore moins de prétendre apporter à son explication une contribution de quelque importance.

Notre seul but a été de fournir aux lecteurs qui voudront bien prendre connaissance de ces pages et désireront approfondir ce sujet, un aperçu synthétique qui leur donne le moyen de se mettre rapidement au courant de la littérature si abondante relative à cette question.

Nous espérons avoir présenté ce dernier aperçu d'une façon originale, sous un jour nouveau, de manière que cette étude ne fasse pas double emploi avec les analyses déjà publiées sur ce problème si important de la Mécanique céleste.

Il est juste cependant de faire observer que nous avons souvent suivi l'exposé lumineux du professeur allemand A. Sommerfeld (dans l'ouvrage célèbre : *Ueber die Theorie des Kreisels*), spécialement pour ce qui regarde l'influence

de l'élasticité de la Terre, et que nous nous sommes maintes fois renseigné aux excellentes publications : *Astronomische Nachrichten*, *Monthly Notices*, *Bulletin astronomique*, *Astronomical Journal*, etc., pour les quelques ouvrages que nous n'avons pu consulter directement.

Voici la manière dont nous avons divisé notre Travail :

Une courte Introduction apprend au lecteur ce qu'on entend par *mouvement eulérien* du pôle de rotation. La contradiction qui existe entre ce mouvement, déduit d'une hypothèse trop simpliste, et les résultats d'observation est mise en relief dans la Première partie. Ces derniers résultats ont montré que le mouvement du pôle à la surface de la Terre est sensiblement épicycloïdal et se compose de deux mouvements périodiques : la période de l'un (circulaire) est de quatorze mois au lieu de dix mois (cycle eulérien) ; la période de l'autre (elliptique) est sensiblement d'un an. Comment expliquer ce désaccord?

La Deuxième partie montre que, si l'on fait entrer en ligne de compte l'élasticité du globe, la période de dix mois peut être portée à quatorze mois (période chandlérienne).

L'explication des oscillations annuelles et des petites irrégularités apériodiques est fournie dans la Troisième partie.

L'étude n'aurait pas été complète si nous n'avions dit un mot, dans une Quatrième partie, des influences qui peuvent, au moins à la longue, diminuer l'amplitude des oscillations du pôle de rotation.

Un Appendice donne quelques explications au sujet d'un terme annuel, intervenant dans l'expression de la variation de latitude, qui ne dépend pas de la position du pôle.

Enfin une Note complète quelques considérations théoriques de la troisième partie.

A la fin de notre Travail, nous avons placé la Bibliographie relative aux explications des variations de latitude.

Nous espérons que cette étude excitera la curiosité des esprits épris de science et les poussera à approfondir cette question.

Henry Janne.

Liége, janvier 1909.

SUR

LA VARIATION DES LATITUDES

INTRODUCTION

Parmi les problèmes de la Dynamique qui intéressent les géologues et géographes au même point que les géodésiens et les astronomes, se place au premier rang celui de la rotation de la Terre autour de son centre de gravité.

Si l'on considère le globe comme un corps parfaitement rigide, ce problème n'est autre que celui de la *rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.*

On sait que c'est à d'Alembert que revient l'honneur d'avoir mis, pour la première fois, ce problème en équations (*); tour à tour Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, Jacobi, Liouville, Poinsot, Serret, Mathieu, Puiseux, M^me^ Kowalewska, Hermite, etc., l'ont repris et envisagé à divers points de vue (**).

Mais l'hypothèse d'une Terre parfaitement rigide est, au point de vue théorique, purement gratuite, et, au point de vue expé-

(*) Voyez, par exemple, P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle,* 2e éd., t. II, 1904, chap. XX, p. 140, et aussi notre opuscule : *Mouvement de rotation d'un corps de forme variable.* Liége, janvier 1908, Impr. liégeoise, p. 1.

(**) Pour plus de détails, consultez le beau mémoire de GILBERT sur cette question. (ANNALES DE LA SOC. SC. DE BRUXELLES, 1878.)

rimental, absolument contraire aux faits observés; nous le montrerons plus loin.

Cette remarque faite, revenons au problème de la rotation du globe, en supposant ce dernier absolument rigide, et examinons les conséquences de cette hypothèse.

Euler, qui a donné aux équations différentielles la forme que nous connaissons, est celui qui a étudié le premier le mouvement du globe (*) autour de son centre de gravité : il le suppose parfaitement rigide et ayant des moments d'inertie équatoriaux égaux; il imagine de plus que les forces extérieures se ramènent à une résultante unique passant par le centre de gravité (cas que nous appelons *rotation naturelle*).

*
* *

Avant de retrouver les résultats auxquels il est parvenu, rappelons brièvement la méthode qu'il emploie pour l'étude générale du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (**).

Imaginons deux trièdres trirectangles, l'un fixe $Ox_1y_1z_1$, l'autre mobile $Oxyz$, ayant pour origine commune le point fixe O et de plus même orientation. Faisons l'hypothèse que, dans les deux trièdres, une rotation de 90° dans le sens positif autour de l'axe des z_1 (ou des z) amène l'axe des x_1 (ou des x) sur l'axe des y_1 (ou des y) : pour fixer les idées, nous choisirons pour sens positif *celui des aiguilles d'une montre*, en supposant l'observateur couché le long de l'axe des z_1 (ou des z), les pieds en O, la tête vers les z_1 (ou z) positifs.

Prenons arbitrairement, sur l'intersection du plan xOy avec le plan x_1Oy_1, une direction positive OU, et désignons par ψ

(*) L. Euler, *Mechanica sive motus scientia.* Saint-Pétersbourg, 1736, 3e partie, chap. XVI, par. 839 et suiv.; *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un point fixe* (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1758, pp. 154-193); *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.* Greifswald, 1765, chap. XII, par. 711, 717-732.

(**) Voyez encore notre opuscule, pp. 2 et suiv.

l'angle de cette direction avec Ox_1, cet angle étant compté positivement autour de Oz_1. La droite OU est perpendiculaire au plan zOz_1.

Appelons θ l'angle que forment les deux axes Oz_1 et Oz, compté positivement de Oz_1 vers Oz dans le sens des rotations positives autour de OU.

Désignons par φ l'angle dont il faut faire tourner la droite OU autour de Oz (car Oz est perpendiculaire au plan UOx) dans le sens positif pour la faire coïncider avec Ox.

Les trois angles ψ, θ, φ sont évidemment indépendants l'un de l'autre et peuvent être choisis arbitrairement.

A chaque système de valeurs $(\psi_1, \theta_1, \varphi_1)$ de ces angles correspond une position, et une seule, du trièdre mobile $Oxyz$: ce trièdre peut passer de la position $Ox_1y_1z_1$ à sa position actuelle au moyen des trois rotations successives : ψ_1 autour de Oz_1, θ_1 autour de OU, φ_1 autour de Oz.

On emploie souvent les expressions suivantes, empruntées à la Mécanique céleste : ψ est appelé l'*angle de précession*, θ l'*angle de nutation*, φ l'*angle de rotation propre*, OU la *ligne des nœuds*.

On sait que si l'on désigne par p, q, r les composantes, suivant les axes mobiles Ox, Oy, Oz, de la *rotation instantanée* $\overline{o}$ du trièdre $Oxyz$ et par ψ', θ', φ' les dérivées $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$ (t représentant le temps), on a les relations (*) :

$$(A)\quad \left\{ \begin{array}{l} p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r = \psi' \cos\theta + \varphi'. \end{array} \right\}$$

Si l'on prend pour trièdre trirectangle mobile $Oxyz$ celui formé par les axes principaux d'inertie du corps solide dont on

---

(*) Pour les obtenir, on n'a qu'à projeter l'égalité vectorielle

$$\overline{p} + \overline{q} + \overline{r} = \overline{o} = \overline{\psi'} + \overline{\theta'} + \overline{\varphi'}$$

sur chacun des axes Ox, Oy, Oz.

étudie le mouvement, si l'on désigne par A, B, C les moments principaux d'inertie du corps et si l'on représente par L, M, N les moments résultants des forces extérieures par rapport à ces axes, on a, pour déterminer le mouvement, les *équations d'Euler :*

$$(B)\quad \left\{ \begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)\,rq = L, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,pr = M, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)\,qp = N. \end{array} \right.$$

L, M, N sont en général fonctions de ψ, θ, φ, ψ', θ', φ', t (si les forces dépendent du temps et des vitesses), ou, à cause des relations (A), fonctions de ψ, θ, φ, p, q, r, t; de plus A, B, C sont des constantes.

Pour résoudre le problème, il s'agit d'intégrer les équations différentielles (B) du mouvement. Le système (A), (B) est formé de six équations différentielles du premier ordre contenant les six variables ψ, θ, φ, p, q, r à déterminer en fonction de t; il s'introduira six constantes dans l'intégration, constantes qui seront déterminées si l'on connaît par exemple les valeurs initiales ψ_0, θ_0, φ_0, p_0, q_0, r_0.

On peut aussi, si l'on veut, substituer les valeurs (A) dans les équations (B); on obtiendra ainsi trois équations différentielles du second ordre en ψ, θ, φ. Leur résolution fera connaître les valeurs de ψ, φ, θ, et par conséquent aussi la position du trièdre mobile qui fixe la position du corps.

* * *

A présent étudions (*) le mouvement de *rotation naturelle* ($L = M = N = 0$) de la Terre autour de son centre de gravité (c'est-à-dire négligeons les actions luni-solaire et planétaires).

Supposons que le globe soit parfaitement rigide et de révo-

(*) Voyez encore notre opuscule, p. 18.

lution. Prenons (fig. 1) pour Oz_1 l'axe OG, fixe dans l'espace (rotation naturelle), du moment résultant des quantités de mouvement, et pour Ox_1, Oy_1 deux axes rectangulaires quel-

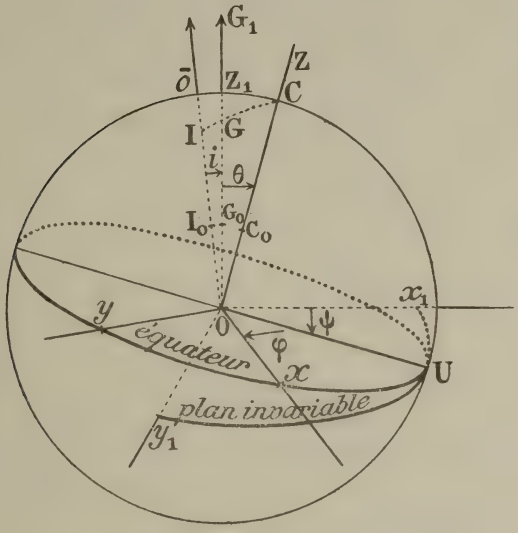


Fig. 1.

conques choisis dans le *plan invariable* passant par O, centre de gravité de la Terre. Assujettissons les axes $Oxyz$ à être invariablement liés au globe. Choisissons pour axe Oz l'axe OC principal d'inertie coïncidant avec l'axe de révolution; dans le plan de l'équateur, perpendiculaire à OC, menons deux axes rectangulaires Ox, Oy (fixes par rapport à la Terre) (*); comme le globe est supposé être un ellipsoïde de révolution homogène, ces axes Ox, Oy seront deux axes principaux d'inertie, et les moments d'inertie correspondants sont égaux (**) :

$$A = B.$$

(*) Nous supposons encore que les trièdres $Ox_1y_1z_1$, $Oxyz$ ont la même orientation que plus haut.

(**) Si l'on supposait exister une légère différence entre A et B, les résultats suivants seraient évidemment un peu modifiés. Voyez, à ce sujet, F.-R. Helmert, *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*. Leipzig, t. II, 1884, p. 400.

Nous aurons donc, pour équations différentielles du mouvement, ces équations d'Euler très simples :

$$(C)\quad \left\{ \begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} + (C-A)\,rq = 0, \\ A\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,pr = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} = 0, \end{array} \right.$$

ou encore

$$(D)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \dfrac{C-A}{A}\,rq = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \dfrac{C-A}{A}\,rp = 0, \\ \dfrac{dr}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

De la troisième équation nous tirons

$$r = \text{constante} = n.$$

Les deux premières deviennent, si l'on pose

$$\frac{C-A}{A}\,n = \nu :$$

$$(E)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \nu q = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \nu p = 0. \end{array} \right.$$

Les intégrales (*) sont évidemment :

$$(F)\quad \left\{ \begin{array}{l} p = \delta \cos(\nu t + \tau), \\ q = \delta \sin(\nu t + \tau). \end{array} \right.$$

(*) Pour les trouver, on peut éliminer q entre les deux équations (E) en

Les relations (A) entre p, q, r et ψ, θ, φ deviennent ici :

$$(G)\quad \left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta_0\sin\varphi, \\ q = \dfrac{d\psi}{dt}\sin\theta_0\cos\varphi, \\ n = \dfrac{d\psi}{dt}\cos\theta_0 + \dfrac{d\varphi}{dt}, \end{array}\right.$$

car

$$\cos\theta = \frac{Cr}{\sqrt{A^2(p^2+q^2)+C^2r^2}} = \frac{Cn}{G} = C^{te},$$

G désignant le moment résultant (constant) des quantités de mouvement par rapport à O,
ou bien

$$\theta = \text{constante} = \theta_0.$$

En divisant la première relation (G) par la deuxième, on a, en tenant compte de (F),

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{q} = \operatorname{cotg}(\nu t + \tau).$$

---

dérivant la première et en lui ajoutant la seconde multipliée par ν; on obtient de la sorte

$$\frac{d^2p}{dt^2} - \nu^2 p = 0,$$

dont l'intégrale est

$$p = \delta\cos(\nu t + \tau);$$

puis on détermine q par l'une des deux équations (E).

Un procédé plus élégant consiste à ajouter les deux équations après les avoir multipliées respectivement par 1 et i; on obtient ainsi

$$\frac{d(p+iq)}{dt} - i\nu(p+iq) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$p + iq = \text{constante} \times e^{i\nu t} = (\delta'\cos\tau + i\delta'\sin\tau)\,e^{i\nu t} = \delta\cos(\nu t+\tau) + i\delta\sin(\nu t+\tau);$$

d'où, en séparant la partie réelle de l'imaginaire, les deux intégrales (F).

Ceci nous donne :

$$\varphi = K\pi + \frac{\pi}{2} - \nu t - \tau = -\nu t + \tau', \quad \text{(H)}$$

K désignant un nombre entier et τ' une nouvelle constante.

Enfin la troisième relation (G) nous permet d'écrire :

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(n - \frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{1}{\cos\theta_0} = \left(n + \frac{C-A}{A}n\right)\sec\theta_0 = \frac{C}{A}n\sec\theta_0,$$

d'où

$$\psi = \frac{C}{A}n\sec\theta_0 . t + \tau'', \quad \text{(I)}$$

τ'' étant encore une constante.

L'observation (*) nous montre que θ_0, c'est-à-dire COG, est très petit et reste inférieur à $0'',3$; par suite sec θ_0 est très voisin de 1 et sin θ_0 très petit. En appelant o la vitesse angulaire constante de rotation de la Terre autour de son axe, on a :

$$\left\{\begin{array}{c} |o| = 2\pi \text{ par jour sidéral,} \\ p^2 + q^2 + n^2 = o^2, \quad n = o\cos\theta_0, \quad n\sec\theta_0 = o, \\ \delta^2 = p^2 + q^2 = o^2 - n^2 = o^2\sin^2\theta_0, \quad \delta = o\sin\theta_0 < 1'',9 \text{ p. j. s.} \end{array}\right\}$$

Avec l'orientation d'axes choisie et le sens positif de rotation adopté, o est négatif. De plus, le globe est *aplati*. Par suite

$$C > A, \quad \frac{C-A}{A} > 0,$$

et

$$\nu = \frac{C-A}{A}n = \frac{C-A}{A}o\cos\theta_0 \text{ est négatif.}$$

(*) Voyez par exemple C.-A.-F. PETERS, *Resultate aus den Beobachtungen des Polarsterns*. (ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, t. XXII, 1844, n° 512, col. 119.)

θ_0 étant très petit et pouvant par conséquent être traité comme une quantité du premier ordre, on peut écrire

$$\cos \theta_0 = 1$$

aux termes du second ordre près, et par suite

$$n = o = -2\pi \text{ par jour sidéral.}$$

Le rapport positif $\frac{C-A}{A}$ peut être déduit de la théorie de la précession luni-solaire; il a été trouvé égal (*) à

$$\frac{C-A}{A} = \frac{1}{305} \text{ environ.}$$

Par conséquent

$$\nu = -\frac{2\pi}{305} \text{ par jour sidéral.}$$

L'expression (H) de φ devient :

$$\varphi = \frac{2\pi}{305} \frac{t}{1 \text{ j. sid.}} + \tau' ; \quad (H')$$

pour que φ augmente de 2π, il faut que t augmente de 305 jours sidéraux ; ainsi φ croît proportionnellement au temps et augmente de 2π en 305 jours.

Pour ψ nous avons d'après (I) :

$$\psi = \frac{C}{A} n \sec \theta_0 . t + \tau'' = \frac{C}{A} o . t + \tau'' = -\frac{306}{305} 2\pi \frac{t}{1 \text{ j. sid.}} + \tau'' ; \quad (I')$$

pour que ψ diminue de 2π, il faut que t augmente de $\frac{305}{306}$ de jour sidéral; ainsi ψ décroît proportionnellement au temps et diminue de 2π en un peu moins d'un jour sidéral.

(*) Voyez, par exemple, TH. VON OPPOLZER, *Lehrbuch der Bahnbestimmung*, 1882, t. Ier; traduction française de E. PASQUIER, 1886, t. Ier.

θ, φ, ψ étant déterminés en fonction du temps, voyons ce que leurs valeurs nous apprennent relativement au mouvement.

Remarquons d'abord que les trois axes

OC d'inertie,

OI de rotation,

OG du moment résultant des quantités de mouvement sont toujours situés dans un même plan; en effet l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{p}{o} & \frac{q}{o} & \frac{r}{o} \\ \frac{Ap}{G} & \frac{Aq}{G} & \frac{Cr}{G} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

montre que les trois droites issues de O, ayant pour cosinus directeurs

$$\begin{matrix} \frac{p}{o}, & \frac{q}{o}, & \frac{r}{o}, \\ \frac{Ap}{G}, & \frac{Aq}{G}, & \frac{Cr}{G}, \\ 0, & 0, & 1, \end{matrix}$$

(par rapport aux axes Ox, Oy, Oz), possèdent cette propriété; et ces trois droites ne sont autres que les axes OI, OG, OC.

De plus, pour la Terre, l'axe OG (fig. 1) se trouve toujours entre OI et OC (*) et est fixe dans l'espace absolu. Ainsi le plan OIGC tourne dans l'espace autour de OG et les axes OI, OC sont situés de part et d'autre de OG.

On sait, par l'observation, que l'angle $COG \equiv \theta$ est inférieur à $0'',3$ et que l'angle $IOG \equiv i$ est encore beaucoup plus petit.

(*) Voyez Poinsot. *Précession des équinoxes, Addition à la Connaissance des Temps pour 1858*, p. 14.

Pour obtenir leurs grandeurs relatives, nous pourrons donc écrire sans erreur sensible :

$$\frac{i}{\theta} = \frac{\text{IOG}}{\text{GOC}} = \frac{\sin \text{IOG}}{\sin \text{GOC}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \text{IOG}}{1 - \cos^2 \text{GOC}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \left[\frac{Ap}{G}\cdot\frac{p}{o} + \frac{Aq}{G}\cdot\frac{q}{o} + \frac{Cn}{G}\cdot\frac{n}{o}\right]^2}{1 - \frac{C^2n^2}{G^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(A^2p^2 + A^2q^2 + C^2n^2)(p^2 + q^2 + n^2) - (Ap^2 + Aq^2 + Cn^2)^2}{(A^2p^2 + A^2q^2 + C^2n^2 - C^2n^2)o^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(C - A)^2 n^2 (p^2 + q^2)}{A^2(p^2 + q^2)o^2}} = \frac{C - A}{A}\frac{n}{o} = \frac{C - A}{A}\cos\theta_0 =$$

$$\frac{1}{305} \text{ environ.}$$

Ainsi l'angle IOG est inférieur au $\frac{1}{300}$ de l'angle COI ; donc

$$\left\{\begin{array}{c} \text{puisque angle COI} < 0''{,}3, \\ \text{angle IOG} < \frac{1}{300} \times \text{angle COI} < \frac{0''{,}3}{300} = 0''001. \end{array}\right.$$

On peut donc pratiquement considérer OI *et* OG *comme deux droites coïncidentes.* Néanmoins, pour la clarté de l'explication, nous les distinguerons l'une de l'autre.

Cela dit, cherchons le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur de rotation $\overline{o}$ par rapport aux axes $Oxyz$; il sera donné par les équations (F) :

$$(\text{F}) \quad \left\{\begin{array}{l} p = \delta \cos(\nu t + \tau), \\ q = \delta \sin(\nu t + \tau), \\ r = n, \end{array}\right.$$

et sera par suite une circonférence, située dans le plan $z = n$, ayant OC pour axe et δ pour rayon.

L'intersection I de l'axe de rotation OI avec la surface du globe aura pour équations paramétriques de son mouvement :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{R}\dfrac{p}{o} = \mathrm{R}\sin\theta_0 \,.\, \cos(\nu t + \tau), \\ y = \mathrm{R}\dfrac{q}{o} = \mathrm{R}\sin\theta_0 \,.\, \sin(\nu t + \tau), \\ z = \mathrm{R}\dfrac{n}{o} = \mathrm{R}\cos\theta_0, \end{array}\right.$$

R étant une longueur très voisine du rayon polaire terrestre. Ainsi *le pôle* I *décrit, à la surface du globe, autour du pôle d'inertie* C, *une circonférence de très petit rayon; il parcourt cette circonférence dans le sens direct* (*rotation négative*) *d'un mouvement uniforme* (*). La vitesse angulaire est

$$\nu = -\frac{2\pi}{305} \text{ par jour sidéral}$$

(On le voit encore en remarquant que la position de OU et, partant, celle de OI sont déterminées par la valeur de l'angle $-\varphi$). La période de son mouvement est de trois cent et cinq jours sidéraux environ, soit à peu près dix mois. Cette période a été nommée *période eulérienne* ou *cycle eulérien*.

Il est clair que le pôle G (**) décrit, à la surface du globe, autour de C, une circonférence très voisine de celle de I, et que le sens de sa rotation et sa vitesse angulaire sont les mêmes que ceux de I. Or ce pôle G est immobile dans l'espace. Donc OC doit se mouvoir dans l'espace, avec toute la Terre, pour que G puisse décrire à sa surface une circonférence. C'est ce qui a lieu.

Remarquons d'abord que la position de OC dans l'espace est fixée par celle de l'intersection OU du plan de l'équateur xOy

---

(*) Voyez, par exemple, F.-R. Helmert, *op. cit.*, t. II, chap. V, p. 391.

(**) Intersection de l'axe OG avec la surface du globe.

avec le plan invariable x_1Oy_1, car OU est perpendiculaire au plan COG et OG est fixe. La position de OU est déterminée par la valeur de l'angle ψ. Nous avons trouvé ci-dessus :

$$\psi = -\frac{306}{305}2\pi\frac{t}{1\text{ j. sid.}} + \tau''(1') :$$

ψ décroît proportionnellement au temps et diminue de 2π en $\frac{305}{306}$ de jour sidéral. Ainsi OU et, partant, OC se meuvent uniformément dans le sens direct (rotation négative); en d'autres termes, OC *décrit, dans le sens direct, un cône circulaire autour de* OG, *et cela d'un mouvement uniforme :* seulement, il accomplit sa révolution $\frac{1}{306}$ de jour avant que la Terre ait accompli la sienne autour de son axe OI de rotation; c'est cette différence qui produit le mouvement de I et de G à la surface du globe.

* * *

La méthode cinématique de Poinsot (*) donne encore une idée plus nette des lois du mouvement.

Nous savons d'après ce géomètre que le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité O peut être figuré par le roulement sans glissement de son ellipsoïde d'inertie (qui est de révolution), tournant autour de O (supposé fixe) sur un plan invariable Π (**).

Appelons I, G, C les intersections de ce plan Π avec l'axe instantané de rotation, l'axe invariable du couple des quantités de mouvement et l'axe de révolution. Le plan Π étant, comme on le sait, tangent en I à l'ellipsoïde d'inertie, est perpendiculaire au méridien COI de l'ellipsoïde passant par I; donc la perpendiculaire OG à ce plan sera contenue dans le méridien COI : en d'autres termes, les axes OC, OG, OI sont à

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XVI. 1851. et *Connaissance des Temps pour 1854*, 1851.

(**) *Plan invariable* de Laplace, *plan du maximum des aires.*

chaque instant situés dans un même plan, ou encore C, G, I *sont continuellement en ligne droite.*

Comme la distance OG du centre O au plan invariable Π doit rester constante et que les ellipses méridiennes sont toutes égales, le point I ne peut décrire, à la surface de l'ellipsoïde, qu'un parallèle de pôle C′ (*) : cette *polhodie* n'est autre que le *cercle eulérien* (sur l'ellipsoïde d'inertie). Il en est de même pour G′, intersection de OG avec l'ellipsoïde.

La figure OIGC est invariable, c'est-à-dire la même pour tous les méridiens.

L'*herpolhodie* sur le plan Π est également une circonférence de centre G et de rayon $\overline{GI} = \sqrt{\overline{OI}^2 - \overline{OG}^2} =$ constante.

GC étant aussi constant, C décrira sur le plan fixe Π une circonférence de centre G et de rayon GC. Le mouvement de I et C (à la surface de Π) autour de G aura lieu dans le même sens.

Enfin la rotation de la Terre *o*, étant proportionnelle à la distance OI, sera constante.

Pour la Terre G se trouve toujours entre I et C, et $\overline{GI}$ vaut environ $\frac{1}{305}$. $\overline{GC}$, car les arcs qu'ils mesurent (en tangentes) sont dans ce rapport (**).

Si l'on veut figurer le mouvement par le roulement sans glissement d'un *cône-roulette* (ayant pour sommet O et pour directrice la polhodie tracée sur l'ellipsoïde d'inertie) sur un *cône fixe* (ayant pour sommet O et pour directrice l'herpolhodie tracée sur le plan invariable Π), on voit (fig. 2) que ce mouvement de rotation naturelle de la Terre autour de son centre O est représenté par le roulement *péricycloïdal* (sans glissement) du cône-roulette d'ouverture $\overline{CI}$ sur le cône fixe d'ouverture (beaucoup plus petite) $\overline{GI}$. Enfin, par la seule considération de la

---

(*) C′ est l'intersection de OC avec la surface de la Terre.

(**) Voyez plus haut. Nous avons, puisque $i = \text{IOG}$ et $\theta_0 = \text{COG}$ sont très petits,

$$\frac{GI}{GC} = \frac{tg\, i}{tg\, \theta_0} = \frac{\sin i}{\sin \theta_0} = \frac{C-A}{A} \cos \theta_0 = \frac{1}{305} \text{ environ.}$$

disposition de I, G, C, on se convainc sans peine que le mouvement de I sur la polhodie et sur l'herpolhodie et le mouvement de C (autour de G) dans l'espace sont *directs*, c'est-à-dire de même sens que la rotation o de la Terre sur elle-même.

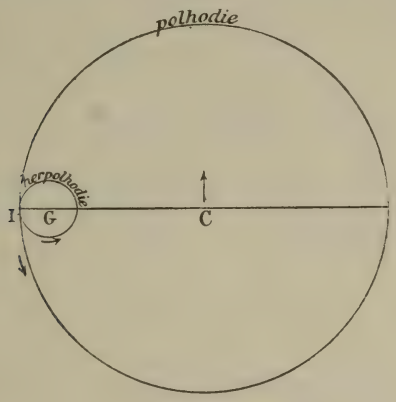


Fig. 2.

Désignons, comme plus haut, par ψ, θ, φ les angles eulériens : Oz est choisi dirigé suivant OC et Ox, Oy sont dans l'équateur; OG est pris pour axe Oz_1, et deux axes perpendiculaires situés dans le plan invariable (perp. à OG passant par O) pour axes Ox_1, Oy_1; de plus les deux trièdres $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$ ont la même orientation que ci-dessus.

La figure OIGC étant invariable (fig. 1), les angles $i = \mathrm{IOG}$, $\theta = \mathrm{GOC}$, $i + \theta = \mathrm{IOC}$ sont constants. Donc les composantes $\frac{d\psi}{dt}$ suivant OG (ou Oz_1) et $\frac{d\varphi}{dt}$ suivant OC (ou Oz) de la rotation constante o (dirigée elle-même suivant OI) sont constantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{dt} = \text{constante}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \text{constante}. \end{array} \right\}$$

De plus, comme pour la Terre $i + \theta < \frac{\pi}{2}$ et que OI tombe à l'extérieur de l'angle GOC (du côté de OG), la composante $\frac{d\psi}{dt}$

est de même sens que ω, c'est-à-dire *négative* avec l'orientation adoptée, tandis que $\frac{d\varphi}{dt}$ est de signe contraire, c'est-à-dire *positive.*

En désignant par μ et ν deux constantes négatives, nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{dt} = \mu, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -\nu, \end{array} \right\}$$

en laissant provisoirement indéterminées ces constantes.

Nous en tirons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \mu t + \tau_1, \\ \varphi = -\nu t + \tau_2; \end{array} \right\}$$

ainsi φ croît proportionnellement au temps, tandis que ψ décroît proportionnellement au temps.

L'angle ψ détermine la position de l'intersection OU de l'équateur xOy et du plan invariable x_1Oy_1, et par conséquent aussi la position du plan IGCO, tournant dans l'espace absolu autour de l'axe fixe OG. Ainsi I et C ont la vitesse angulaire négative constante μ, dans leur mouvement sur le plan fixe Π (autour de G).

L'angle $-\varphi$ détermine la position de OU relativement à l'axe Ox *fixe dans l'ellipsoïde d'inertie,* et par conséquent celle du plan IGCO, tournant autour de l'axe OC *fixe dans l'ellipsoïde.* Donc I et G tournent autour de C, à la surface de l'ellipsoïde d'inertie, avec la vitesse angulaire négative constante ν.

On voit donc que tous ces mouvements sont *directs.*

Il reste maintenant à faire voir que ces vitesses angulaires ν, μ ont bien les valeurs indiquées plus haut :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = -\dfrac{2\pi}{305} \text{ par jour sidéral,} \\ \mu = -\dfrac{306}{305} 2\pi \text{ par jour sidéral.} \end{array} \right\} \text{(a)}$$

Le point C_0, situé à la distance 1 de O sur OC (et du même côté que C du point O) (fig. 1), se meut avec l'axe OC dans l'espace d'une seule et unique façon. Or son mouvement peut être regardé comme résultant soit de la rotation o de la Terre autour de OI, soit de la rotation μ autour de OG; sa vitesse linéaire devant être la même (dans les deux manières d'envisager le mouvement), nous avons

$$\overline{\mathfrak{M}_{C_0}\, o_{OI}} = \text{vitesse linéaire de } C_0 \text{ dans l'espace} = \overline{\mathfrak{M}_{C_0}\, \mu_{OG}},$$

[les indices affectant le signe des moments $\mathfrak{M}$ indiquent le point par rapport auquel on les prend, tandis que ceux affectant les rotations désignent l'axe suivant lequel elles sont dirigées], ou explicitement :

$$o \sin (i + \theta) = \mu \sin \theta,$$

d'où

$$\mu = \frac{\sin (i + \theta)}{\sin \theta}\, o. \quad \text{(b)}$$

Le point G_0 situé à la distance 1 de O sur OG (et du même côté que G du point O) reste immobile dans l'espace. Cependant on peut le considérer comme participant à deux rotations simultanées, autour d'axes différents, produisant des effets contraires : à la rotation de la Terre o autour de OI et à la rotation (eulérienne) ν de G autour de OC. Sa vitesse linéaire résultante devant être nulle, nous aurons

$$\text{vitesse linéaire de } G_0 \text{ dans l'espace} = \overline{\mathfrak{M}_{G_0}\, o_{OI}} + \overline{\mathfrak{M}_{G_0}\, \nu_{OC}}$$
$$= o \sin i - \nu \sin \theta = 0,$$

d'où

$$\nu = \frac{\sin i}{\sin \theta}\, o. \quad \text{(c)}$$

Reste à calculer les rapports :

$$\frac{\sin (i + \theta)}{\sin \theta}, \quad \frac{\sin i}{\sin \theta}.$$

Pour cela exprimons que la projection du moment résultant $\overrightarrow{OG_1}$ des quantités de mouvement sur la perpendiculaire OH à OG dans le plan OIGC est nulle. Nous pouvons écrire à cette fin que la somme algébrique des projections sur OH des composantes g_C, g_A de $\overrightarrow{OG_1}$ suivant les axes principaux OC, OA (OA est l'axe équatorial contenu dans le plan OIGC) est nulle, soit

$$g_C \sin\theta + g_A \cos\theta = 0. \quad \text{(d)}$$

Si nous désignons par r_A, r_C les distances d'une masse élémentaire m aux axes OA, OC, nous aurons évidemment

$$\begin{cases} g_C = \Sigma\, \mathfrak{M}_{OC}\, \overrightarrow{mv} = \Sigma\, mr_C^2 \,.\, o\cos(i+\theta) = C\cos(i+\theta)\,.\,o, \\ g_A = \Sigma\, \mathfrak{M}_{OA}\, \overrightarrow{mv} = \Sigma\, mr_A^2\,[-o\sin(i+\theta)] = -A\sin(i+\theta)\,.\,o. \end{cases}$$

La relation (*d*) s'écrit alors :

$$C\cos(i+\theta)\sin\theta - A\sin(i+\theta)\cos\theta = 0,$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(i+\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{C}{A}\dfrac{\cos(i+\theta)}{\cos\theta}, & \text{(e)} \\ \text{ou} \qquad \operatorname{tg}(i+\theta)\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{C}{A}. & \text{(f)} \end{cases}$$

En combinant (*b*) et (*e*) nous obtenons

$$\mu = \frac{C}{A}\frac{\cos(i+\theta)}{\cos\theta}\,o. \quad \text{(g)}$$

Quant à (*c*), nous l'écrivons sous la forme

$$\nu = \frac{\sin i}{\sin\theta}\,o = \frac{\sin(\overline{i+\theta}-\theta)}{\sin\theta}\,o = \cos(i+\theta)\,[\operatorname{tg}(i+\theta)\operatorname{cotg}\theta - \,']\,o.$$

En introduisant dans cette expression la valeur (*f*), nous avons

$$\nu = \frac{C-A}{A}\cos(i+\theta)\;o. \quad \text{(h)}$$

i et θ étant très petits, nous pouvons, sans grande erreur, poser $\frac{\cos(i+\theta)}{\cos\theta} = 1$ et même $\cos(i+\theta) = 1$.

Comme $o = -2\pi$ par jour sidéral et $\frac{C-A}{A} = \frac{1}{305}$, on obtient bien les valeurs (a) annoncées pour μ et ν.

*
* *

La *latitude* d'un lieu géographique, qu'on détermine par les observations d'étoiles, se rapporte à l'axe de rotation OI de la Terre; or cet axe peut se mouvoir dans le globe; on conçoit donc bien que le mouvement du pôle instantané I de rotation à la surface du globe doit entraîner une *variation de latitude géographique.* Remarquons cependant que nous n'avons pas démontré que, pour un globe parfaitement rigide de révolution, ce mouvement *doit* exister, mais seulement qu'il *peut* exister. En effet, si OI coïncide originairement avec OC, il ne cessera pas de coïncider avec cet axe pendant tout le mouvement. Il faut donc vérifier expérimentalement si un écart entre ces deux axes existe.

La variation de latitude se laisse voir encore plus nettement si on définit la *latitude :* le complément de l'angle que forme l'axe de rotation de la Terre soit avec la verticale du lieu d'observation (*latitude géographique*), soit avec la droite qui joint le lieu d'observation au centre de la Terre (*latitude géocentrique*); dans les deux cas il s'agit d'un angle que forme une droite fixe dans la Terre avec l'axe de rotation (mobile dans la Terre). Suivant que cet axe se rapproche ou s'éloigne du lieu d'observation, la latitude de ce lieu augmente ou diminue.

Il est clair que d'autres coordonnées astronomiques, telles que la déclinaison, l'angle horaire, l'ascension droite, etc., seront aussi affectées par le mouvement du pôle de rotation sur la sphère céleste (*). Mais nous nous bornerons à envisager ici celles

---

(*) On peut consulter à ce sujet notamment : E. Fergola, *Sulla Posizione dell'Asse di Rotazione della Terra rispetto all'Asse di figura,* Naples, 1874; *Vierteljahrschrift der Astr. Gesellsch.* Leipzig, 1876, pp. 94-103. —

des latitudes. Nous avons à examiner dans le présent Travail :

1° Si les observations ont montré l'existence d'une variation dans les latitudes;

2° Si, cette existence étant prouvée, ces variations sont celles que prévoit la théorie eulérienne;

3° Sinon, de quelle manière on doit modifier l'hypothèse trop simpliste d'un globe rigide, et quelle peut être l'influence sur le mouvement du pôle de phénomènes perturbateurs géologiques, météorologiques, etc.

PREMIÈRE PARTIE

Comparaison des résultats d'observation avec ceux de la théorie eulérienne.

§ 1. — *Historique des observations.*

La première question qui se pose est celle-ci : se produit-il réellement des fluctuations dans la latitude d'un lieu?

Les astronomes du XVIII[e] siècle, si l'on en excepte deux ou trois, ne paraissent pas s'être préoccupés de telles fluctuations, ni même d'en avoir soupçonné l'existence. La variation de latitude, si elle existe, doit donc être très faible. [Effectivement les observations postérieures ont montré qu'elle ne devait pas excéder deux ou trois dixièmes de seconde.] On comprend donc pourquoi elle n'a été décelée qu'assez tard.

F.-R. Helmert, *op. cit.*, t. II, 1884, p. 393. — G.-H. Darwin, *The Eulerian nutation of the Earth's axis*. (Bull. Acad. des sc. de Belgique, 1903, n° 1, p. 147.) — C. le Paige, Note (*Bull. Acad. des sc. de Belgique*, 1903, n° 1, p. 17), et les articles innombrables de F. Folie (*Bull. Acad. des sc. de Belgique*), etc.

Pendant longtemps cette variation a été de l'ordre des erreurs d'observation. Mais les méthodes d'observation se perfectionnant sans cesse, il est arrivé un moment où l'on a pu dégager des chiffres la preuve de fluctuations; dans la suite, on est parvenu à préciser ces fluctuations et à déterminer la loi qu'elles suivent.

*
* *

Bessel, Brioschi, Pond avaient déjà cru reconnaître certaines variations dans les latitudes de Greenwich et de Naples. Brioschi parlait même (1820) d'une variation périodique et séculaire. Plus tard (1836-1860), Airy (*), en employant les valeurs de la réfraction donnée par Bradley, obtenait pour la latitude de Greenwich

1836-1841.	51°28′38″43
1842-1848.	51°28′38″17
1851-1860.	51°28′37″92

il attribuait la variation de latitude à des changements survenus dans la manière d'opérer.

De plus, comme M. Nyrén l'a rapporté (**), Bessel avait aussi tenté de constater les variations de latitude au moyen d'observations de la Polaire (combinées avec des lectures à une mire placée dans le méridien).

Si l'on fait abstraction de ces quelques recherches, on peut dire que c'est à C.-A.-F. Peters (***) qu'est due la première indication précise des oscillations périodiques des latitudes. Il a montré où en était la question de l'existence d'une période de

---

(*) *Memoirs of the Astronomical Society*, t. XXXII.

(**) *Bestimmung der Nutationsconstante.* (Bull. Ac Sc. Saint-Pétersbourg, t. XIX, 1871.) — *Die Polhöhe von Pulkowa.* (Bull. Ac. Sc. Saint-Pétersbourg, t. XXI, 1873.)

(***) *Resultate aus den Beobachtungen des Polarsterns.* (Bull. Ac. Sc. Saint-Pétersbourg, 1844, et Astronomische Nachrichten, t. XXII. 1844, n° 512.) — *Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes.* (Mém. Obs. Saint-Pétersbourg, t. I, 1853.)

dix mois (*) et a aussi recherché une solution pratique du problème au moyen d'observations de la Polaire. Dans le mémoire de 1844, il a discuté 279 observations de cette étoile qu'il avait effectuées lui-même, pendant les années 1842-1843, au fameux cercle vertical d'Ertel de l'Observatoire de Poulkowa.

Il a conclu que les variations pouvaient être déduites de la formule

$$\Delta\varphi = r\cos(\xi + 432°71\,t),$$

où φ représente la latitude de Poulkowa, $r = 0''079$, $\xi = 341°6$ et où t est évalué en années tropiques comptées à partir de 1842,0.

On voit ainsi que le résultat des observations de Peters semblait réellement prouver que la latitude possédait une périodicité voisine de celle de dix mois. Cependant, à cette époque, on pouvait encore croire que les variations étaient dues à l'influence des saisons.

Environ dix ans plus tard, J. Clerk Maxwell a publié (**) les résultats d'une longue série d'observations de la Polaire, faites, dans le même but, à Greenwich pendant les années 1851-1854. Il a conclu qu'il ne s'était produit, pendant ce laps de temps, aucun écart (compté à partir de la valeur moyenne) qui dépassât une demi-seconde d'arc, mais que ses résultats n'étaient nullement en contradiction avec la théorie eulérienne, que, au contraire, ils semblaient indiquer une faible trace de minimum de latitude dans chacune des quatre années.

A ces premières conclusions se rattachent de plus récentes énoncées par M. Nyrén, qui sont d'ailleurs contradictoires avec celles-là. Cet astronome a repris et développé les recherches de Peters dans deux célèbres mémoires (***). Là sont discutées

---

(*) Cf. F.-R. Helmert. *op. cit.*, t. II, p. 394.

(**) *On a dynamical Top.* (Edinburgh Roy. Soc. Trans., 1857, t. XXXII, p. 559.)

(***) *Bestimmung der Nutationsconstante* et *Die Polhöhe von Pulkowa.* (Bull. Ac. Sc. Saint-Pétersbourg, 1871, t. XIX; 1873, t. XXI.) — Cf. Helmert, *op. et lib. cit.*, p. 396.

762 observations faites à l'instrument des passages et au cercle vertical de Poulkowa par W. Struve, C.-A-F. Peters, H. Gyldén et M. Nyrén.

Citons en passant les observations de S. Newcomb à l'Observatoire naval de Washington de 1862 à 1867 (*), celles de A. Gaillot à l'Observatoire de Paris de 1856 à 1861 (**) et celles de Y. Villarceau au même Observatoire (***).

Downing, à son tour, a publié (iv) les résultats d'une longue série d'observations de distances zénithales de la Polaire faites à Greenwich pendant les années 1868-1877. Ses conclusions se rapprochent beaucoup de celles de Peters, tant au point de vue de l'importance de la variation qu'au point de vue de l'époque du maximum de cette variation. Mais les trois séries d'observations de Poulkowa (faites par les astronomes russes cités et rapportées par Nyrén) viennent jeter une note discordante. Ces dernières sembleraient permettre de conclure qu'aucune constance n'existe dans l'amplitude et la phase de la variation : ce qui est opposé aux conclusions de la théorie eulérienne. Nyrén pensait que la période de dix mois devait être très probablement affectée de perturbations irrégulières, sur les causes desquelles il était d'ailleurs très loin d'être fixé.

(*) Ces observations ont été communiquées par W. Thomson à la fin de son célèbre discours présidentiel de Glascow. Voyez *Report of Meeting of the British Ass. for the Adv. of Sc.* Londres, 1876, p. 11, *American Journal of Sc.*, 1876, t. XII, et *Arch. de Genève* (2), 1876, t. LVII.

(**) Gaillot a discuté 1077 déterminations de la latitude de l'Observatoire de Paris, faites au cercle mural de Gambey. Voyez *Comptes rendus*, novembre 1878, et *Annales de l'Obs. de Paris*, 1862, t. VIII, p. 319. Il a trouvé que la moyenne mensuelle de la latitude montre une variation bien marquée qui dépend des saisons.

(***) Voyez *Annales de l'Obs. de Paris*, t. VIII, p. 350. Villarceau, pour l'explication des écarts, s'est tenu dans une réserve prudente.

On peut consulter aussi Bourlot, *Esquisse d'une étude sur les variations de latitude et déclinaison dans la région française*. Paris et Colmar, et Périgaud, *Sur une triple détermination de la latitude du cercle de Gambey*. (Comptes rendus, novembre 1888, t. CVI.)

(iv) *The possible ten month period of variation in latitude.* (Monthly Notices of the R. Astr. Soc. Londres, 1880, t. XL.)

Pour appuyer l'hypothèse de la variation, on pouvait déjà citer le fait que les latitudes de plusieurs observatoires importants semblaient être soumises à des oscillations. Plusieurs exemples de telles oscillations ont été réunis par Fergola (*). C'est ainsi qu'on a trouvé :

Paris	Avant 1825	48°50'13"0
	1851-1854.	48°50'11"2
Greenwich	1825-1826.	51°28'38"59
	1837-1841.	51°28'38"43
	1842-1848.	51°28'38"17
	1851-1860.	51°28'37"92
Milan	1811	45°27'60"7
	1871	45°27'59"19
Rome	1807-1812.	41°53'54"26
	1866	41°53'54"09
Naples	1820	40°51'46"63
	1871	40°51'45"41
Washington	1845-1846.	38°53'39"35
	1861-1864.	38°53'38"78

Cependant bon nombre de ces variations pourraient très bien être attribuées à des erreurs instrumentales. De plus des causes d'erreurs périodiques (**), telles que l'emploi d'une constante de réfraction entachée d'inexactitude, pourraient avoir une influence sur les résultats.

* * *

La question n'était pas encore tirée au clair, lorsque Fergola

---

(*) *Determinazione novella della latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte*, 1872.

(**) Les mêmes remarques s'appliquent aux valeurs de la latitude de Poulkowa, données par

Peters, en 1843.	59°56'18"727.
Gyldén, en 1866.	59°56'18"654.
Nyrén, en 1872-5	59°56'18"501.

proposa, au Congrès de Rome (*) (1888), de charger une commission spéciale qui procédât à l'observation méthodique des variations de latitude; malheureusement on ne donna alors aucune suite à ce projet, qui devait d'ailleurs être réalisé plus tard et produire de si beaux fruits (**).

Le problème aurait probablement encore attendu longtemps une solution si F. Küstner n'avait prouvé la réalité de variations dans les latitudes au moyen d'observations extrêmement précises.

Dans un mémoire (***), il a publié les résultats des pointés qu'il avait faits lui-même à l'instrument des passages de l'Observatoire de Berlin de 1884 à 1886. Ces résultats lui donnaient, pour la correction du nombre de Struve, une moyenne de — 0″,132, avec une erreur probable de 0″,01 à 0″,02, valeur inattendue, puisque Nyrén avait trouvé à Poulkowa une correction positive de + 0″,05. Aussi, pour expliquer cette anomalie, Küstner n'a vu d'autre moyen que de supposer qu'une variation se produisait dans la latitude : il lui semblait démontré que la latitude de Berlin avait été au printemps 1885 de 0″,20 plus faible qu'au printemps 1884 (IV).

(*) A ce même Congrès, J.-V. Schiaparelli fit un rapport très intéressant. Il fit notamment remarquer que le problème de la variation des latitudes revient à déterminer les déplacements du pôle d'inertie C, puisque ceux du pôle de rotation I les suivent de très près. Il montra que ces déplacements exigeraient, pour atteindre une seconde d'arc, des transports énormes de masses à la surface du globe, mais que, si l'on fait entrer en ligne de compte une plasticité (du globe) suffisante, des actions géologiques actuelles peuvent très bien produire des effets appréciables. (Voyez *Variazione dell' Asse di Rotazione*, *Club Alpino*, 1883). Schiaparelli devait d'ailleurs reprendre et développer ces idées un peu plus tard, dans un beau mémoire : *De la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques*. Saint-Pétersbourg, 1889.

(**) Voyez les nombreux rapports du *Service international des latitudes*. (*Internationaler Breitendienst.*)

(***) *Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationsconstante, nebst Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhe*. Berlin, 1888. Voyez aussi *Astron. Journal*, nos 431, 479.

(IV) Ces résultats ont été communiqués au Congrès de Salzbourg (1888) et de Paris (1889). On peut du reste en avoir une analyse détaillée en consultant le *Bulletin astronomique*, t. V, décembre 1888, pp. 541 et suiv.

A. Nobile a traité aussi ce sujet si important dans trois mémoires.

Dans le premier (*), il a trouvé pour Naples une latitude sensiblement la même que celle que Fergola avait donnée : ce résultat exclurait donc l'hypothèse d'une diminution séculaire. Dans les deux derniers (**), il a discuté ses propres observations ainsi que celles d'autres astronomes (Brioschi, Celoria, Rajna, etc.) faites à Naples, Poulkowa, Greenwich, Oxford, Washington. Il semble ressortir de sa discussion que la latitude d'un lieu est sujette à une variation *annuelle* et possède un minimum au mois de mai (au moins pour l'Europe occidentale).

L. de Ball s'est occupé aussi de cette question. Trois séries d'observations qu'il a effectuées ont montré un maximum de latitude au *printemps*, ce qui est contradictoire avec la conclusion de Nobile : en effet, douze années (1865-1876) d'observations faites à Oxford ont paru, d'après ce dernier, présenter un maximum de latitude en *automne*. Il est cependant nécessaire de dire que ces résultats ne sont pas parfaitement nets et que quelques étoiles, entre autres la Polaire, sembleraient plutôt montrer un minimum en automne (***).

Ces conclusions, bien qu'assez contradictoires, étaient déjà importantes : elles permettaient d'affirmer que *la latitude d'un lieu n'était plus constante*, comme on l'avait admis pendant longtemps, *mais bien variable, et que ses variations présentaient une certaine périodicité (voisine d'un an)* (iv).

(*) *Terza determinazione della latitudine geografica del R. Osservatorio di Capodimonte.* Naples, 1883.

(**) En deux parties : *Ricerche numeriche sulla latitudine del R. Osserv. di Capodimonte.* Naples, 1885 et 1888.

(***) Voyez encore *Bulletin astronomique,* tome V, décembre 1888.

(iv) F. Küstner pensait à attribuer les variations de latitude à un déplacement angulaire de la Terre par rapport à son axe OI de rotation, qui reste sensiblement fixe dans l'espace, mais qui ne coïncide pas toujours avec le même diamètre terrestre. Selon lui, les phénomènes météorologiques ou souterrains provoqueraient des oscillations plus ou moins irrégulières de l'axe d'inertie principal OC autour de l'axe de rotation OI. Au reste, F.-R. Helmert a parfaitement admis que ces fluctuations pouvaient exister,

*
* *

A cette époque ont commencé des observations systématiques. Au début de 1889 les Observatoires de Berlin, de Potsdam, de Prague et de Strasbourg se sont entendus pour entreprendre en commun une étude des petites oscillations des latitudes. Les résultats, très satisfaisants, ont été communiqués aux Congrès de Paris (1889) et de Fribourg (1890) : à ce dernier, notamment, on remarquait deux Notes fort intéressantes : l'une de Th. Albrecht (*), l'autre de Marcuse (**). Dans la première étaient analysées et discutées les observations effectuées (de janvier 1889 à avril 1890) simultanément par Marcuse à Berlin, Schnauder à Potsdam, Weiniek et Gruss à Prague, Kobold à Strasbourg. On avait tracé les diagrammes de la valeur de la latitude pour chaque observatoire. L'allure des courbes de variation était très sensiblement la même, la concordance vraiment frappante (***).

Pour Berlin, Marcuse obtenait :

Janvier 1889.	52°30'17''20
Août 1889.	52°30'17''55
Février 1890.	52°30'17'05

---

mais estimait cependant qu'elles ne devaient pas excéder quelques centièmes de seconde, contrairement à l'opinion de W. Thomson. Ce dernier (voyez son discours de Glascow) croyait qu'elles pouvaient atteindre une demi-seconde; cette opinion a été reproduite dans un mémoire de H. Gyldén [*Ueber den Einfluss, welchen Aenderungen der Rotationsaxe der Erde auf das Meeresniveau ausüben können* (Bull. Ac. Sc. Saint-Pétersbourg, t. XVI, 1871)] et dans un travail de G.-H. Darwin [*Influence of geological changes on the Earth's axis of rotation* (Philosophical Transactions, Londres, t. CLXVII, 1877)]; cependant nous ferons observer que les calculs de Thomson n'ont jamais été, à notre connaissance, publiés en détail et qu'on est donc en droit de mettre un peu en doute ce chiffre de 0''5.

(*) *Resultate der Beobachtungsreihen betreffend die Veränderlichkeit der Polhöhen*, 1890.

(**) *Resultate der fortgesetzten Berliner Beobachtungsreihen betreffend die Veränderlichkeit der Polhöhen*, 1890.

(***) Voyez le numéro de septembre 1890 du *Bulletin astronomique* (t. VII) et les *Astronomische Nachrichten*, 1890, t. CXXV.

Dans la seconde Note, Marcuse rendait compte des observations qu'il avait continuées lui-même à Berlin du 15 avril au 30 août 1890. *Ces observations, comme les premières, confirmaient nettement l'existence de la variation de la latitude.* Ainsi pour Berlin on avait :

Avril 1890 . . . . . 52°30′17″14
Août 1890 . . . . . 52°30′17″52 } (*)

* * *

En 1890, l'astronome américain, S.-C. Chandler (**), en faisant l'analyse harmonique des mouvements du pôle I indiqués par les observations, a découvert que *ce pôle* I *de rotation décrit autour d'un point fixe* C_0 *de la surface de la Terre une courbe qui, rigoureusement, n'est pas fermée, mais que cependant le mouvement de* I *possède* sensiblement *une double périodicité : l'une des périodes est de douze mois* (*annuelle*), *l'autre de quatorze mois* (et non pas de dix mois). Ce résultat était extrêmement important, et Chandler a continué pendant longtemps ses études (***) pour affermir et compléter ses conclusions. A cette époque, R. Radau (iv) et F.-R. Helmert (v) ont émis des considérations théoriques très intéressantes, qui montrent comment les oscillations du pôle d'inertie C peuvent se retrouver *considérablement amplifiées* dans celles du pôle de rotation. Nous aurons l'occasion d'y revenir plus loin.

En 1891, on s'est résolu à envoyer une expédition à Honolulu

(*) Voyez aussi une note de F. Tisserand, dans le *Bulletin astronomique*, septembre 1890, t. VII, p. 350, et quelques réflexions de A. Gaillot : *Sur les variations observées dans la latitude d'un même lieu.* (Comptes rendus, octobre 1890.)

(**) *Astronomical Journal*, nos 248-249, t. XI, 1891.

(***) *Astronomical Journal*, t. XI, XII, XV, XIX, XXI, XXII..., 1891, 1892... Voyez aussi *Science*, mai 1895.

(iv) *Bulletin astronomique*, t. VII, p. 352; *Comptes rendus*, t. CI, p. 558; *Méc. céleste* de F. Tisserand, t. II, p. 536.

(v) *Astronomische Nachrichten*, 1891, t. CXXVI, no 3014.

pour y faire des déterminations de latitudes qu'on voulait comparer ensuite à celles faites à Berlin pendant le même temps. [On a choisi Honolulu parce qu'il se trouve assez près du méridien opposé à celui de Berlin (171° ouest).] Si les variations des latitudes avaient leur cause dans le mouvement de l'axe instantané de rotation par rapport au globe, ces variations devaient se produire, à Berlin et à Honolulu, dans des sens opposés : un maximum de latitude à Berlin devait correspondre à un minimum à Honolulu, et réciproquement.

Les résultats de cette expédition furent absolument conformes aux prévisions. *L'amplitude de l'oscillation des deux latitudes était comprise entre 0''2 et 0''3;* mais ce qu'il y avait de plus remarquable, c'était que *les phases de la variation étaient précisément opposées pour les deux stations* (*). *Ce fait confirmait nettement l'hypothèse déjà plusieurs fois émise, à savoir que la variation des latitudes était causée (ou du moins trouvait son explication) par l'oscillation de l'axe instantané dans le globe.*

*
* *

S. Newcomb a expliqué, dans une Note devenue célèbre (**), comment un certain degré d'élasticité de la Terre peut porter la période *eulérienne* de dix mois à la période *chandlérienne* de quatorze mois. Nous en reparlerons plus bas. Il a eu pour continuateurs dans cette voie : S. Hough, I. Newton, Th. Sloudsky, V. Volterra, A. Sommerfeld, comme nous le verrons dans la partie théorique de ce mémoire.

*
* *

A partir de cette époque, les publications traitant la question

---

(*) Voyez *Verhandlungen der 1895 in Berlin abgehaltenen Konferenz der internationalen Erdmessung*, Berlin, 1896, et le diagramme reproduit (p. 674) dans le 3e fascicule du bel ouvrage : F. Klein et A. Sommerfeld : *Ueber die Theorie des Kreisels*. Leipzig, 1903.

(**) *On the Dynamics of the Earth's Rotation, with respect to the Periodic Variations of Latitude.* (Monthly Notices, t. LII, mars 1892, n° 5, pp. 336 et suiv.)

de la variation des latitudes deviennent si nombreuses, qu'il est absolument impossible de les analyser ou même de les citer toutes. Nous nous bornerons seulement à mentionner les plus importantes d'entre elles.

F. Gonnessiat, outre quelques remarques (*) sur les déterminations de latitude effectuées par Périgaud (**), a publié un mémoire (***) où il analysait et discutait ses propres observations. Ces observations confirmaient l'existence des deux oscillations du pôle terrestre indiquées par Chandler : l'une, de quatorze mois de période, a pour amplitude maxima 0″14; l'autre, annuelle, a presque la même amplitude (0″155); de plus, Gonnessiat trouvait qu'on devait ajouter deux termes nouveaux ayant respectivement 1 an 8 et 9 ans 5 pour périodes, 0″04 et 0″10 pour coefficients. La formule qu'il a donnée est la suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 = &- 0''14 \cos\left[t - \left(1890{,}00 - \frac{\lambda}{n_1}\right)\right] n_1 \\ &- 0''155 \cos\left[\odot + \lambda - 330\right] \\ &- 0''04 \cos\left[t - \left(1889{,}00 - \frac{\lambda}{n_3}\right)\right] n_3 \\ &- 0''10 \cos\left[t - \left(1888{,}1 + \frac{\lambda}{n_4}\right)\right] n_4, \end{aligned}\right.$$

où t désigne le temps, $\odot$ la longitude du soleil, λ la longitude terrestre rapportée au méridien de Lyon, et où les vitesses angulaires ont pour valeurs :

$$\left\{\begin{aligned} n_1 &= 307° \text{ à laquelle correspond } \tau_1 = 1 \text{ an } 173, \\ n_2 &= 360° \quad \text{id.} \quad \tau_2 = 1 \text{ an } 00, \\ n_3 &= 200° \quad \text{id.} \quad \tau_3 = 1 \text{ an } 80, \\ n_4 &= 38°7 \quad \text{id.} \quad \tau_4 = 9 \text{ ans } 3. \end{aligned}\right.$$

(*) *Bulletin astronomique*, t. XV, mai 1898, p. 161.

(**) *Comptes rendus*, novembre 1888, t. CVI.

(***) *Mém. Ac. Sc. Paris*, 1898; et analyses dans les *Comptes rendus*, t. CXXIV, 1897, p. 938 et t. CXXVI, 1898, p. 710.

Les deux premiers termes sont ceux de Chandler; le quatrième se rapporte probablement au déplacement des nœuds de l'orbite lunaire (*).

Th. Albrecht a tenu le monde scientifique au courant des observations récentes des variations de latitudes par une grande quantité d'articles (**). Il formait des moyennes mensuelles de la latitude du lieu, qui, comparées à une certaine valeur moyenne, fournissaient les variations $\Delta\varphi$ de cette latitude. Après avoir compensé les $\Delta\varphi$ par des tracés graphiques, il déterminait les coordonnées x, y du pôle de rotation I au moyen des relations

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\varphi = x\cos\lambda + y\sin\lambda, \\ \Delta\varphi' = x\cos\lambda' + y\sin\lambda', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

(où $\lambda, \lambda', \ldots$ désignent les longitudes des stations à l'ouest de Greenwich) indiquées par Kostinsky (***). Il obtenait de la sorte pour polhodie une courbe très compliquée, dont l'allure générale était celle d'une spirale lévogyre.

E.-F. Van de Sande Bakhuyzen s'est également beaucoup occupé de la question (iv). Il trouve pour équations du mou-

---

(*) En effet, sa période est de $\frac{18 \text{ ans } 2/3}{2}$ environ et l'oscillation correspondante se propage de l'est à l'ouest. Le troisième terme a son coefficient n_3 vérifiant très sensiblement la relation de commensurabilité : $n_3 = 3n_1 - 2n_2$.

(**) *Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariationen*, Berlin, 1896, 1897, 1898...; *Bericht über die Vorbereitungen für den internationalen Polhöhendienst*, Berlin, 1898 (Astr. Nachr., n° 3532); *Bahn des Nordpoles der Erdaxe von 1895,1 bis 1899,8* (Astr. Nachr., n° 3633), etc.

(***) *Variation de la latitude de Poulkowa*, 1893.

(iv) *On the motion of the Pole of the Earth according to the observations of the years 1890-1896* (Bull. Ac. Sc. Amsterdam, juin 1898); *Some remarks upon the 14-monthly motion of the pole of the Earth upon the length of its period* (Id., octobre 1898); *Sur le mouvement du pôle terrestre d'après les observations des années 1890-1897*... [Arch. néerlandaises (2), t. II, 1899]; *The motion of the pole of the Earth according to the observations of the last years* (Bull. Ac. Sc. Amsterdam, août 1900).

vement du pôle instantané I (x, y) à la surface du globe :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \quad 0''121\cos\dfrac{360^\circ}{365}(t-271) + 0''151\cos\dfrac{360^\circ}{432}(t-2412439), \\ y = -0''057\sin\dfrac{360^\circ}{365}(t-271) - 0''143\sin\dfrac{360^\circ}{432}(t-2412438), \end{array}\right.$$

où t est la date julienne de l'observation [par exemple 2412464 = 1893,0, etc.].

Continuant ses études, S.-C. Chandler a publié, en 1897 et 1898, deux Notes (*) résumant l'ensemble des formules dont il faisait usage. Il a conclu que la période nouvellement proposée était variable et que sa valeur moyenne de 1890 à 1897 était de 427 jours. Il a adopté finalement, après beaucoup de discussions, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0''10\sin(\Theta - 308^\circ) + r_1\sin\theta(t-T_1), \\ y = 0''11\cos(\Theta - \quad 3^\circ) + r_1\cos\theta(t-T_1), \end{array}\right.$$

où les paramètres ont les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} T_1 = 2412646 + 427{,}0\,E - 0{,}08\,E^2, \\ \theta = 0^\circ843 + 0^\circ000316\,E, \\ r_1 = 0''125 + 0''05\sin(2414363 - t)\,0''015; \end{array}\right.$$

E désigne un nombre entier et Θ la longitude du soleil moyen (**).

(*) *Synthetical statement of the theory of the polar motions* (Astr. Journal, n° 406, 1897); *Comparison of the observed and predicted motions of the pole (1890-1898) and determination of revised elements* (Astr. Journal, n° 446, 1898).

(**) Pour plus de détails, consultez *Bulletin astronomique*, t. XVI, février 1899, pp. 70 et suiv. Il faut remarquer que Chandler désigne par $+x$. $+y$ ce qu'Albrecht représente par $+y, -x$, en sorte que la variation de latitude est donnée, avec les notations de Chandler, par

$$\Delta\varphi = x\sin\lambda - y\cos\lambda.$$

En 1902, Chandler revenait encore sur ce sujet (*). Il montrait que, pour l'ellipse de période annuelle représentée par les premiers termes des seconds membres de ses formules, la ligne des apsides tournait de l'est à l'ouest de 6° par an, dans le sens contraire à celui du pôle I sur la pollhodie; la période variait peu et ne différait jamais de l'année que de quelques jours en plus ou en moins. En outre, Chandler introduisait un nouveau terme, assez petit, ayant un coefficient de 0″09 et une période de 436 jours, qui représentait une composante du mouvement jumelle de la principale (sensiblement de même période) (**).

Deux ans plus tard, H. Kimura, dans une série d'articles (***), disait que la période de quatorze mois devait être portée à quatorze mois et demi et, de plus, qu'il existait, dans la variation de latitude $\Delta\varphi$, *un terme annuel* z, *indépendant de la longitude* λ, qui devait être ajouté aux termes ordinaires, en sorte que

$$\Delta\varphi = x \cos\lambda + y \sin\lambda + z.$$

On a essayé d'expliquer la provenance de ce terme (terme de Kimura) de plusieurs façons. (Voyez l'Appendice.)

En 1900, avait déjà commencé à fonctionner le *Service international des latitudes*, organisé par le Bureau central de l'Association géodésique, sur les observations duquel s'appuyaient Chandler et Kimura. Ce Service avait six postes échelonnés le long du 39ᵉ parallèle : Mizusawa, Tchardjui, Carloforte, Gaithersburg, Cincinnati, Ukiah; ces six postes, ayant des longi-

---

(*) *Astronomical Journal*, nos 489, 490, 494, 495, 513, 515, 517, 524, 530, etc.

(**) Voyez encore : S. Newcomb, *Astronomical Journal*, n° 452; Rees, Jacoby et Darwin, *Astronomical Journal*, n° 401; Boccardi, *Bulletin astronomique*, avril 1900, t. XVII; Küstner, *Astronomical Journal*, 1900; Weeder, *Bulletin de l'Académie des Sciences*, Amsterdam, avril 1900, etc.

(***) *On the existence of a new annual term*... (Astr. Nachrichten, n° 3783, t. CLVIII; *On the six years cycle of the polar motion during the interval 1891-1902* (Ibid., n° 3932, février 1904); *On the period of the 14 ½ month's term* (Ibid., n° 3981, novembre 1904); *Results of the latitude determinations*.. (Ibid., nos 4040-4041, août 1905; Astronomical Journal, n° 546, etc.)

tudes différentes, permettaient de déterminer avec exactitude (*) les deux composantes du mouvement du pôle.

Pour plus de détails, consulter les nombreux comptes rendus des travaux exécutés par le Service, publiés par Th. Albrecht (**).

En 1904, H.-G. Van de Sande Bakhuyzen (***) a encore émis des considérations théoriques sur ce sujet (voir plus bas), ainsi que L. Courvoisier (iv), A. Pannekoek (v) et P. Harzer (vi).

Enfin, parmi les travaux les plus récents citons encore ceux de R. Schumann (vii), E. Grossmann (viii), Th. Albrecht et B. Wanach (ix).

Faisons remarquer, pour terminer ce résumé d'observations, que les variations de position de l'axe instantané dans le globe peuvent encore se déceler expérimentalement d'une autre manière. Définissons la colatitude (géographique) d'un lieu par l'angle de la direction de la pesanteur en ce lieu avec l'axe de rotation de la Terre. Si nous supposons qu'il se produise un déplacement de cet axe, sans changement dans la direction de la verticale, il en résultera une variation de l'angle en question et, par conséquent, de la latitude géographique du lieu. On pourra donc constater les variations de latitude au moyen des *déviations du fil à plomb* par rapport à l'axe de rotation. Mais on doit observer que d'autres causes peuvent produire aussi des déviations de la verticale.

(*) Voyez, par exemple, *Astronomische Nachrichten,* n° 3808.

(**) *Provisorische Resultate des internationalen Breitendienstes in der Zeit von* 1902,0 *bis* 1903,0; 1903,0 *bis* 1904,0, etc. (Astr. Nachr., nos 3945, 4017, 4121, etc.), et aussi : G. Förster, *Ueber die Gewichte der Beobachtungen...*, Astr. Nachr., n° 4045 ; R. Radau, *Bulletin astronomique*, t. XIII, 1896, p. 275 ; t. XVI, 1899, pp. 70 et 249 ; t. XVIII, 1901, p. 280 ; t. XX, 1903, p. 259 t. XXIII, 1906, p. 203.

(***) *Einige Bemerkungen über die Aenderungen der Polhöhe.* (Astr. Nachr., 1904, n° 3937.)

(iv) *Astronomische Nachrichten*, 1904 et 1905, nos 3990, 3991, 4012, 4031.

(v) *Astronomische Nachrichten*, 1905, nos 4008, 4024.

(vi) *Astronomische Nachrichten*, 1905, n° 4028.

(vii) *Astronomische Nachrichten*, 1903, n° 3877 ; 1907, nos 4142, 4143.

(viii) *Astronomische Nachrichten*, 1907, n° 4159.

(ix) *Astronomische Nachrichten*, 1907, n° 4167.

Ainsi G.-H. Darwin a recherché (*) quelles étaient les déviations du fil à plomb produites par l'effet mécanique des pressions barométriques sur la croûte élastique de la Terre; il a déterminé aussi quelles étaient les variations de la verticale, au voisinage des mers, causées par le flux et le reflux. On voit, par des considérations théoriques, que ces déviations peuvent être sensibles. Il est impossible de citer ici toutes les expériences faites dans ce but; il suffit de faire remarquer qu'il y a possibilité expérimentale de les déceler de cette façon (**).

* * *

Enfin, parmi les modes opératoires imaginés pour constater la variation de position de l'axe de rotation, l'un des plus originaux est la mesure précise (simultanée en plusieurs endroits) de la *hauteur de la marée*. Il est clair qu'un déplacement de l'axe instantané doit influer sur les mouvements de l'océan en modifiant les phénomènes centrifuges; un déplacement périodique entraînerait aussi une variation périodique dans le niveau moyen des mers. La difficulté réside dans l'appréciation exacte de celui-ci. Cependant Van de Sande Bakhuyzen (***)

(*) *On variations in the vertical due to elasticity of the Earth surface.* (PHILOSOPHICAL MAGAZINE, 5e série, t. XIV, 1882.)

(**) Citons seulement au point de vue expérimental et théorique : L. HENGLER, *Die astronomische Pendelwage.* (DINGLERS POLYT. JOURNAL. Stuttgart, 1832.) — C.-A.-F. PETERS, *Die kleinen Ablenkungen der Lothlinie.* (BULL. AC. SC. SAINT-PÉTERSBOURG, t. III, 1844; ASTR. NACHR., n° 507, 1845.) F. ZÖLLNER, *Zur Geschichte des Horizontalpendels.* (VERH. DER SAECHS. GESELLS. DER WISS., Leipzig, 1872.) - A. D'ABBADIE, *Études sur la verticale.* (ASSOC. FR., Bordeaux, 1872.) — *Recherches sur la verticale.* (ANN. SOC. SC., Bruxelles, t. V, 1881.) - G.-H. DARWIN, *Small displacements of the plumb line.* (BRITISH ASSOC. REPORT et MONTHLY NOTICES, 1881 et 1882.) — J.-G. HAGEN, *Déviation du fil à plomb.* (ASTR. NACHR., 1884, t. CVII, n° 2568.) — W. THOMSON et P.-G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, t. II, 1883, p. 390.) - VON REBEUR PASCHWITZ, *Anwendung des Horizontalpendels* (ASTR. NACHR., 1889, n° 2874; BULL. ASTR., t. IV, 1887, p. 541, et t. VI, 1889, p. 183); *Beobachtungen am Horizontalpendel* (ASTR. NACHR., 1900, nos 3001-3002); et les travaux de PERROT, HENRY, ELLIS, DARWIN, FÖRSTER, etc.

(***) *Astronomische Nachrichten*, n° 3261.

et A.-S. Christie (*) prétendent avoir reconnu, dans le mouvement des marées sur les côtes hollandaises et américaines, une variation de quelques centimètres ayant une période de quatorze mois (**) : leurs résultats confirmeraient donc l'existence de la période chandlérienne.

§ 2. — *Conclusion à tirer des observations.*

Que conclure de tous ces résultats? En élaguant tout ce qui est douteux ou mal établi, on peut assez bien les résumer en disant : *Le mouvement du pôle de rotation* I *à la surface du globe se compose de deux autres uniformes : l'un, circulaire, d'une périodicité de quatorze mois; l'autre, elliptique, d'une périodicité de douze mois,* en sorte que les équations du mouvement de I sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{A}\cos\dfrac{2\pi}{427}(t-\tau_1) + \mathrm{B}\cos\dfrac{2\pi}{366}(t-\tau_2), \\ \\ y = \mathrm{A}\sin\dfrac{2\pi}{427}(t-\tau_1) + \mathrm{B}'\sin\dfrac{2\pi}{366}(t-\tau_2), \end{array}\right\} \quad (1)$$

où A, B, B′, τ_1, τ_2 sont des constantes convenablement choisies et où t désigne l'époque.

Par exemple, S.-C. Chandler avait indiqué avant 1898 (***) :

$$\mathrm{A} = 0''16,\ \mathrm{B} = 0''15,\ \mathrm{B}' = 0''04,\ \tau_1 = 5\ \text{oct. } 1892 + \left(\frac{11}{45}\times 427\right)\text{jours}$$

$\tau_2 =$ 5 octobre, en choisissant pour axes coordonnés :

Direction 45° longitude Est de Greenwich pour axe Ox,
Id. 135° id. id. id. Oy.

(Orientation inverse de celle que nous avons adoptée.)

(*) *Bulletin of the Phil. Soc. of Washington,* t. XII, 1895, p. 103; *Astr. Journal,* n° 351, 1896.

(**) Voir également sur ce sujet : H. Gyldén, *Mélanges Ac. Saint-Pétersbourg*, t. IV, 1870. — W. Thomson, *Collected Papers,* t. III, p. 332. — J. Larmor, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, t IX, mai 1896.

(***) Valeurs d'ailleurs rapportées par L. Grabowski. [*Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegungen.* (Sitzungsberichte der K. Ak. der Wiss., Vienne, 1898, t. CVII, p. 507.)]

De plus *la variation de la latitude peut être représentée par*

$$\Delta\varphi = x \sin \lambda - y \cos \lambda + z, \quad (2)$$

λ étant la longitude de la station (comptée dans un sens convenable à partir d'un certain méridien) : z désigne le terme annuel de Kimura, indépendant de λ.

Cependant si l'on s'en tenait aux formules (1), on pourrait croire que *la polhodie se ferma* (épicycle) au bout de sept ans (plus petit multiple des périodes de douze et de quatorze mois), ce qui serait contraire à la réalité : en fait, il se produit des oscillations du pôle d'un troisième genre qui ne semblent pas être périodiques.

Dorénavant nous appellerons

oscillations de première espèce, les oscillations du pôle qui ont la période chandlérienne de quatorze mois ;

oscillations de deuxième espèce, les oscillations qui ont la période annuelle (douze mois) ; et

oscillations de troisième espèce, les petites oscillations qui ne semblent suivre aucune règle.

Nous allons maintenant montrer, par une analyse élémentaire due à A. Sommerfeld (*), comment du chemin du pôle (tracé d'après les observations) on a pu déduire que ses oscillations présentent la double périodicité annoncée.

Nous extrayons la figure ci-après (fig. 3) du *Rapport de la Commission des latitudes* fait à Berlin en 1900, d'ailleurs reproduite dans l'excellent ouvrage de Sommerfeld (**). Cette figure montre le chemin qu'a suivi le pôle de rotation de 1890 à 1899,8.

Les nombres inscrits désignent les dates (années et dixièmes d'année) pour lesquelles on a fait la réduction de l'ensemble des observations des diverses stations.

(*) Voyez F. Klein et A. Sommerfeld, *Ueber die Theorie des Kreisels*, 3e fascicule, 1903, pp. 677 et suiv. Le procédé n'est applicable que sous certaines restrictions (*op. cit.*, p. 729).

(**) *Op. cit.*, 3e fascicule. p. 675.

A cause du grand nombre d'observations, l'erreur moyenne de chacune des coordonnées n'est que de 0″03. L'origine des coordonnées a été choisie à la *position moyenne* du pôle de rotation.

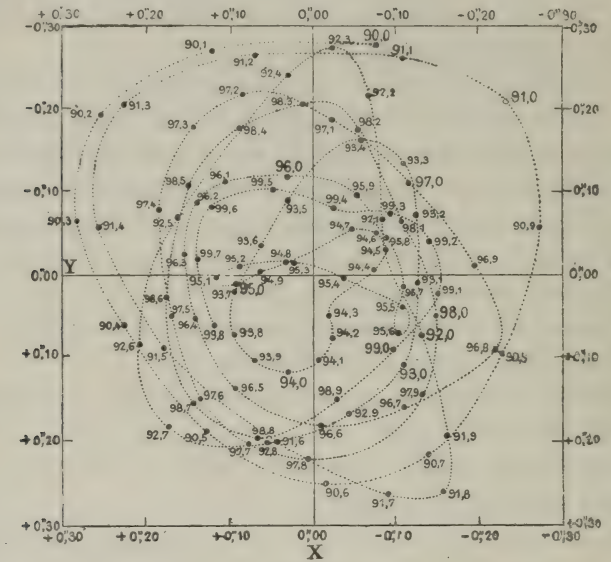


Fig. 3.

A première vue, le mouvement du pôle ne semble obéir à aucune loi simple. On est bien loin du simple mouvement circulaire d'Euler : à peine, de 1890,0 à 1891,5, la trajectoire a-t-elle quelque analogie avec une circonférence. Cependant ce qui doit nous frapper, c'est que le mouvement du pôle de rotation est *direct*, c'est-à-dire qu'il a le sens que la théorie eulérienne indique : à part toutefois pendant le laps 1895,0 à 1895,6 (où ont agi probablement des influences perturbatrices antagonistes, ou bien se sont produites des erreurs d'observation plus considérables).

L'*amplitude de l'oscillation* du pôle est toujours inférieure, en module, à 0″3 et même à 0″29; elle reste, en moyenne, égale à 0″25, au moins pendant 1890,0 à 1892,0; vers 1895,3

l'amplitude est devenue presque nulle, probablement encore sous l'influence de phénomènes accidentels, car, peu après, elle est redevenue égale à 0″20 (*).

La *valeur moyenne* de l'amplitude peut être prise égale à 0″125, soit un huitième de seconde, ce qui correspond à un écart du pôle (compté à partir de sa position moyenne) de 4 mètres environ à la surface du globe.

Cette valeur moyenne est encore inférieure au chiffre 0″2 de Peters.

Mais ce qui nous intéresse surtout, c'est le point de savoir si ces oscillations du pôle sont *périodiques* ou non. Pour tirer cette question au clair, nous allons procéder de la manière suivante (méthode assez grossière, mais suffisante pour notre objet) :

Faisons abstraction de la boucle rétrograde de sept mois (durant de 1895,0 à 1895,6), en la supposant donc parcourue dans le sens direct comme les autres spires. Nous constatons alors que, dans l'intervalle de neuf ans cinq mois (1890,0-1899,4), le rayon vecteur (unissant l'origine à la position instantanée de I) a accompli huit révolutions : on voit donc déjà que le mouvement du pôle a une période τ_1 de

$$\tau_1 = \frac{9,4}{8} \text{ ans}, \quad \text{soit } \tau_1 = \frac{9,4}{8} \times 12 = 14,1 \text{ mois} :$$

c'est la *période chandlérienne*.

[Évidemment notre grossière évaluation n'a rien de commun avec les procédés très précis de Chandler, mais, encore une fois, nous voulons seulement donner ici une idée de la découverte.]

Supposons que le mouvement du pôle ait plusieurs périodes $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Si nous désignons par $z = x + iy$ le pôle I (*affixe*),

---

(*) L'amplitude a décru régulièrement de 1890 à 1895, puis a augmenté jusque 1898; à partir de cette époque, elle a de nouveau diminué, puis recommencé à croître, etc. [Voyez *Astronomische Nachrichten*, n° 3808.]

nous pourrons alors écrire cette quantité complexe sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l} z = \delta_1 e^{2\pi i \frac{t}{\tau_1}} + \delta_1' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_1}} \\ \quad + \delta_2 e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \delta_2' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right\} (^*)$$

Ainsi nous supposons *a priori* que le mouvement du pôle I peut être réalisé par la combinaison de plusieurs mouvements elliptiques (**) : $z = \delta e^{2\pi i \frac{t}{\tau}} + \delta' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau}}$, de périodes τ_1, τ_2, ...

Nous venons de déterminer la période τ_1 (= 14 mois environ); pour l'éliminer de la figure représentant les oscillations du pôle, nous ferons $t = t$ et $t = t + \tau_1$, et nous soustrairons les deux valeurs de z correspondantes l'une de l'autre :

$$\begin{array}{l} z_{t+\tau_1} - z_t = \delta_2\left(e^{2\pi i \frac{t+\tau_1}{\tau_2}} - e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}}\right) + \delta_2'\left(e^{-2\pi i \frac{t+\tau_1}{\tau_2}} - e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}}\right) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ \delta_2\left(e^{2\pi i \frac{\tau_1}{\tau_2}} - 1\right) e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \delta_2'\left(e^{-2\pi i \frac{\tau_1}{\tau_2}} - 1\right) e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ R e^{2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + R' e^{-2\pi i \frac{t}{\tau_2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots , \end{array}$$

R, R′,... désignant de nouvelles constantes complexes.

Ainsi l'une quelconque des périodes restantes τ_2, τ_3, ... joue, vis-à-vis de la différence $z_{t+\tau_1} - z_t$, le même rôle analytique que τ_1 joue vis-à-vis de z_t.

Il suffit donc, pour éliminer τ_1, de construire une nouvelle courbe dont le point générateur (pôle fictif) soit l'affixe de l'imaginaire $z_t' = z_{t+\tau_1} - z_t$. Nous joindrons par des vecteurs tous les

(*) i désigne ici l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et les δ représentent des constantes (*complexes* pour plus de généralité).

(**) Ce ne serait pas le cas pour des oscillations dont l'amplitude décroîtrait suivant une exponentielle du temps, telles que celles envisagées dans la Quatrième partie.

points de la vraie trajectoire du pôle à leurs *homologues* sur la même courbe (*) (*homologues* signifiant ici positions du pôle au commencement et à la fin de l'intervalle constant 14 mois = 1,17 an); et à partir d'un point quelconque O', nous mènerons des rayons vecteurs *équipollents* aux vecteurs de la première figure. Nous obtiendrons de la sorte une nouvelle figure, encore plus complexe que la première, mais débarrassée de la période de quatorze mois. L'inspection de cette figure (**) nous montre que l'amplitude est *généralement de moitié moindre*, c'est-à-dire inférieure à 0″15. Nous pouvons conclure de là qu'*il existe, en réalité, une période de quatorze mois et que la moitié de l'amplitude est due à des oscillations de première espèce;* et, comme la nouvelle figure est plus compliquée que la première, *que les oscillations de deuxième espèce sont moins régulières et moins simples que celles de première espèce.*

Ces oscillations de deuxième espèce sont-elles bien celles que nous avons désignées sous ce nom ci-dessus? En d'autres termes, *possèdent-elles une période annuelle?* Pour le voir, nous procéderons comme nous venons de le faire. Nous remarquerons que les positions du pôle fictif correspondant aux millésimes exacts (1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898) tombent toutes, à très peu de chose près, dans le même quadrant de la nouvelle figure, et nous verrons ainsi que *se dessine très sensiblement une période annuelle* (en faisant toujours abstraction des boucles rétrogrades) (périodicité $\tau_2 = 12$ mois).

En utilisant de nouveau notre procédé graphique pour rechercher s'il n'existe pas une troisième période τ_3, nous

---

(*) Par exemple nous joindrons par un vecteur les positions du pôle pour 1890,0 et 1891,17; l'affixe du vecteur équipollent de la nouvelle figure sera marqué 1890.0 et ainsi de suite

Pour découvrir les *périodes cachées*, voyez aussi H. BURKHARDT, *Entwickelungen nach oscillierenden Funktionen.* (JAHRESBERICHT DER DEUTS. MATH. VEREINIGUNG, t. X, 1901, pp. 312-333); A. SCHUSTER, *Nature*, t. LXVI, 1902, pp. 614-618.

(**) Voyez F. KLEIN et A. SOMMERFELD, *op. cit.*, 3e fascicule, pp. 680, 681.

obtenons une figure (*) qui rappelle un peu la forme d'un huit, dans laquelle aucune périodicité ne se laisse deviner. Il s'agirait donc ici d'*oscillations de troisième espèce* non périodiques, mais présentant plutôt un caractère de variations dues à des phénomènes perturbateurs agissant apparemment sans loi simple. *La grandeur de ces oscillations est à peu près de l'ordre de celle des oscillations de deuxième espèce.*

Nous avons résumé ici le raisonnement de Sommerfeld, vrai chef-d'œuvre de clarté (**).

Condensons encore davantage notre résumé.

Le mouvement du pôle se compose :

1° d'oscillations de première espèce, périodiques de quatorze mois, ayant une amplitude moyenne de 0″,15;

2° d'oscillations de deuxième espèce, périodiques de douze mois, ayant une amplitude moyenne inférieure à celle des oscillations de première espèce;

3° d'oscillations de troisième espèce irrégulières d'une amplitude à peu près égale à celle des oscillations précédentes.

Enfin dans la variation de la latitude intervient un terme (***), pas encore bien expliqué, indépendant des coordonnées x, y du pôle.

§ 3. — *Comparaison entre la théorie eulérienne et l'observation. Raisons de la différence entre leurs résultats.*

Il n'est pas nécessaire de réfléchir longtemps pour apercevoir la grande différence qui existe entre les résultats (pour le mouvement du pôle) de la théorie eulérienne de ceux de l'observation. Alors que la première exige un mouvement régulier périodique de dix mois, l'autre montre un mouvement très complexe, composé d'oscillations périodiques de quatorze mois et de douze mois et d'oscillations irrégulières.

(*) Voyez F. Klein et A. Sommerfeld, *op. cit.*, 3e fascicule, p. 683.

(**) Pour plus de détails consulter son ouvrage, 3e fascicule, chapitre VIII, Section B.

(***) Terme de Kimura.

D'où provient cette différence ?

Elle provient de ce que *la théorie eulérienne part d'une hypothèse trop simple : elle suppose que la Terre est parfaitement rigide*, c'est-à-dire qu'elle ne se déforme pas sous l'action de sa propre rotation et que ses parties ne changent pas de position les unes vis-à-vis des autres, et enfin *elle fait abstraction des phénomènes perturbateurs* qui peuvent se produire en son intérieur ou à sa surface.

* * *

Il faut du reste remarquer que la théorie eulérienne n'envisage pas l'action des forces extérieures (principalement l'action luni-solaire). Sans vouloir traiter ici le problème de la rotation d'un corps (solide ou non) sous l'action des forces extérieures, nous ferons seulement observer que ces dernières introduisent de petites perturbations dans le mouvement de l'axe instantané dans le globe.

E. Mathieu a fait une étude très pénétrante (*) de cette question, en supposant la Terre parfaitement rigide. Il a montré d'une manière rigoureuse que les forces extérieures peuvent produire de petites oscillations périodiques dans la période de dix mois, qui doivent jouer le rôle de variations d'un second genre : ces oscillations sont d'ailleurs très petites. Au reste R. Radau a fait observer (**) que les forces extérieures compliquent un peu le phénomène du déplacement eulérien : le mécanisme connu de la précession et de la nutation luni-solaire produit une faible variation diurne (***), dont le coefficient oscille entre 0 et 0″02 (ce qui fournit un écart maximum de 0″04, dont il ne semble pas qu'on se soit préoccupé dans la détermination des constantes du cycle eulérien).

Cependant *nous ne ferons pas cas des forces extérieures*, car

---

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3e série, 1876, t. II. Nous ne citons pas les travaux classiques de Laplace, Poisson et Serret.

(**) *Bulletin astronomique*, septembre 1890, t. VII, p. 352.

(***) Voir à ce sujet des explications plus complètes dans la *Mécanique céleste* de F. Tisserand, t. II, 1891, pp. 420 et 496.

leur considération nous mènerait trop loin ; au reste l'oscillation qu'elles produisent est de l'ordre de l'erreur moyenne (0″03) des observations les plus précises.

Il est bon de rappeler que les recherches de F. Gonnessiat (*) semblent montrer, dans la variation de latitude, un terme dépendant de la position des nœuds de l'orbite lunaire.

* * *

L'hypothèse d'un globe parfaitement rigide ne peut d'ailleurs se justifier.

Tout d'abord les considérations cosmogoniques, les constatations géologiques semblent montrer que l'intérieur de la Terre est, *au moins en partie*, fluide (**). De ce chef le problème de la rotation du globe devient beaucoup plus compliqué, et les équations d'Euler ne suffisent évidemment plus pour déterminer les lois du mouvement. De plus, l'écorce [ou la Terre elle-même tout entière, si on la suppose à l'état solide (***)] ne possède qu'une rigidité relative et doit se déformer sous l'action de sa propre rotation : cette déformation (bourrelet équatorial) ne suit elle-même les variations de position de l'axe instantané qu'avec une vitesse d'adaptation plus ou moins grande. Enfin les frottements du noyau fluide sur l'écorce [ou tout au moins d'une couche visqueuse sous-jacente (IV)] doivent également introduire des perturbations dans les lois de la rotation.

Les changements géologiques que nous invoquons pour expliquer certains accidents de la croûte terrestre, ou que nous voyons actuellement s'opérer sous nos yeux, ont eu ou ont

---

(*) Cf. *Comptes rendus*, t. CXXIV, 1897, p. 938. A un autre point de vue, W. de Sitter trouve que l'action luni-solaire pourrait donner lieu à une petite influence qui, en se combinant avec celle de la parallaxe (0″02) de Kapteyn, fournirait la moitié du terme complémentaire z de Kimura entrant dans l'expression de la variation $\Delta\varphi$ de latitude. (Voyez l'Appendice.)

(**) Hypothèse de la plupart des géologues.

(***) Hypothèse de W. Thomson.

(IV) Hypothèse de E. Wiechert.

encore une répercussion sur la rotation de la Terre. A cette catégorie de phénomènes appartiennent les éruptions volcaniques, le soulèvement ou l'abaissement séculaire de certaines contrées, la formation de nouveaux continents ou de nouvelles montagnes, etc.

Nous devons également tenir compte de l'existence des océans : les protubérances qu'ils forment sous l'action combinée de l'attraction du Soleil, de la Lune et de la force centrifuge, le frottement des marées sur la surface du globe influent eux aussi sur la rotation de ce dernier.

Les courants marins, même s'ils ne changent guère la répartition des masses à la surface du globe, introduisent dans les équations différentielles du problème des quantités de mouvement relatif et modifient de ce chef les circonstances du mouvement de la Terre.

Nous en dirons autant des perturbations atmosphériques, qui, cependant, peuvent produire en outre des inégalités plus sensibles dans la répartition des masses.

La fonte des glaces polaires, le déplacement, la formation ou la disparition des glaciers sont encore autant de causes capables d'amener des perturbations dans le mouvement du globe.

Le ruissellement des fleuves, l'arrachement et la désagrégation de roches ou de terrains déjà formés, le dépôt des alluvions aux embouchures des cours d'eau, le desséchement de lacs ou de mers intérieures, l'action chimique des eaux, etc., peuvent aussi apporter des fluctuations dans ce mouvement.

Enfin, comme causes extérieures, on a même songé à invoquer un couple magnétique en rapport avec les taches du Soleil (*)

(*) Sans vouloir discuter ici cette influence, nous mentionnerons cependant quelques articles qui s'y rapportent. J. Halm a montré [*On a peculiar connection...* (Astr. Nachr., n° 3619)], par la comparaison de diagrammes que les mouvements du pôle terrestre semblent assez bien être affectés de la période de onze ans des taches solaires et de la période de cinquante à soixante ans de ces taches et des aurores boréales. Après que W. Thackeray eut contesté (Astr. Nachr., n° 3635) cette affirmation, il a répondu [*Latitude variation, Earth magnetisma and Solar activity* (Astr. Nachr., n° 3649)]

et aussi les chutes de météorites qui introduisent des nouvelles masses dans l'écorce du globe.

Nous n'avons pas l'intention de citer ici toutes les causes perturbatrices : ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre combien est complexe le problème de la rotation de la Terre.

Seulement une question se pose :

Ces phénomènes ont une influence sur la rotation de la Terre; mais leur influence est-elle *sensible* et parvient-elle à expliquer les grands écarts qui existent entre la théorie eulérienne et l'observation ?

En d'autres termes, au point de vue *qualificatif* cette influence est incontestable; mais l'est-elle aussi au point de vue *quantitatif?*

Pour expliquer telle ou telle de leurs anomalies, la cosmogonie, la géologie, la climatologie, la paléontologie peuvent réclamer des mouvements considérables de masses à la surface ou à l'intérieur du globe qui se seraient produits dans les temps préhistoriques. Elles ont beau jeu d'invoquer l'existence de changements énormes qui auraient eu lieu dans l'écorce terrestre, à la surface de la Terre, dans l'atmosphère pendant l'époque de la genèse de notre monde. Les hypothèses peuvent être avancées du moment qu'elles expliquent, d'une manière satisfaisante et suffisamment rigoureuse, les faits constatés (*).

Sans vouloir contester en aucune façon l'exactitude de leurs assertions, nous citerons, dans cet ordre d'idées, quelques opinions d'auteurs.

---

en produisant les diagrammes qui représentaient, d'une part, la fréquence des aurores et perturbations magnétiques et des taches solaires, et, d'autre part, les variations de l'obliquité de l'écliptique, des latitudes et des ascensions droites du Soleil : d'après lui, la similitude des deux courbes prouverait l'action du Soleil sur l'axe magnétique du globe (distant d'environ 12° de l'axe géométrique de la Terre).

(*) C'est ainsi que les discussions qui ont surgi surtout entre les géologues anglais ont montré la faiblesse et l'insuffisance de théories regardées jusque-là comme très solides.

J. Evans (*) pensait que la présence d'une riche flore crétacée et tertiaire sous le 80e parallèle ne pouvait trouver d'autre explication que dans un changement notable de la position des pôles.

E. J. Stone (**) croyait que primitivement l'axe de rotation de la Terre avait été assez écarté de son axe géométrique; mais que, par suite de phénomènes de frottement (tels que celui des marées), l'axe de rotation s'était graduellement rapproché de l'autre.

Dans un de ses Mémoires (***), H. Gyldén émettait l'avis que la différence $C - A$ entre les moments d'inertie polaire et équatorial du globe avait pu être originairement très petite, mais qu'elle aurait augmenté par suite des érosions que l'action continuelle des eaux produit sur les continents ; cette hypothèse pourrait fournir une explication de la période glaciaire, car cette augmentation aurait eu pour conséquence de rapprocher l'axe de rotation de l'axe géométrique et de faire décrire ainsi au pôle de rotation I une spirale autour du pôle géométrique C_0 (qui l'aurait graduellement rapproché de ce dernier).

G.-H. Darwin (iv) et S. Haughton (v) ont déterminé les mouvements du pôle causés par les soulèvements des continents actuels et l'affaissement des vallées océaniques, etc.

Ces divers résultats sont très intéressants. Mais nous voulons examiner ici si les phénomènes *que nous voyons s'opérer sous nos yeux* peuvent avoir une influence notable sur les mouvements du

---

(*) *Quarterly Journal of the geological Society*, t. XXXII, 1866; *Proceedings of the R. Soc.*, Londres, 1866.

(**) *On the possibility of a change in the position of the Earth's axis.* (Monthly Notices, Londres, t. XXVII, mars 1867.)

(***) *Rotationslagarne för en fast kropp, hvars yta är betäckt af ett flytande ämne.* (Bull. Ac. Sc., Stockholm, 1878, nº 7.) Voyez aussi Klee, *Der Urzustand der Erde und die Hypothese von einer Aenderung der Pole*, 1843.

(iv) *Influence of the geological changes...* (Phil. Trans., Londres, 1877, t. CLXVII.)

(v) *Notes on physical Geology.* (Proceed. of the R. Soc., Londres, 1878, t. XXVI.)

pôle et, notamment, s'ils peuvent être la cause des différences existant entre la théorie eulérienne et les observations.

Nous montrerons :

1° Que les oscillations du pôle de première espèce peuvent voir leur période de dix mois devenir celle de quatorze mois, si l'on fait entrer en ligne de compte l'élasticité de la Terre (Deuxième partie) ;

2° Que les oscillations de deuxième espèce (de période annuelle) peuvent être causées par des phénomènes géologiques et météorologiques (notamment les déplacements atmosphériques), si l'on observe que l'influence de ces derniers peut être *notablement amplifiée* par une sorte d'interférence qui se produit entre les périodes de quatorze et de douze mois (*) (Troisième partie) ;

3° Que les oscillations de troisième espèce peuvent également être produites par des phénomènes accidentels (géologiques et surtout météorologiques) (Troisième partie).

[Pour l'explication des 2° et 3°, nous aurons besoin d'exposer la Théorie du mouvement de rotation d'un corps de forme variable.]

Enfin nous donnerons quelques opinions d'auteurs sur la cause du terme de Kimura entrant dans l'expression de la variation de latitude (Appendice); mais auparavant nous montrerons que quelques phénomènes (**) peuvent diminuer l'amplitude des oscillations du pôle au lieu de l'augmenter (Quatrième partie).

D'où les dernières divisions de notre Travail :

Deuxième partie. — Explication de la période chandlérienne au moyen de l'élasticité de la Terre.

Troisième partie. — Explication des oscillations annuelles et apériodiques.

(*) *Multiplication* de Radau et Helmert. (*Op. cit.*)

(**) Tels que le frottement des marées, l'existence d'une couche visqueuse non élastique à l'intérieur du globe, etc.

A. Théorie du mouvement de rotation d'un corps de forme variable.

B. Influence des mouvements internes sur le déplacement du pôle :

a) Influence directe des phénomènes;

b) Influence indirecte des phénomènes.

Quatrième partie. — Influence de phénomènes jouant le rôle de résistances passives.

Appendice. — Quelques mots d'explication sur le terme de Kimura.

Note. — Complément de la section *A* de la Troisième partie.

DEUXIÈME PARTIE.

Explication de la période chandlérienne au moyen de l'élasticité de la Terre.

§ 1. — *Résumé très succinct des théories émises sur la composition du globe.*

Nous ne ferons pas ici une analyse détaillée de tout ce qui a été écrit sur ce sujet (*); nous nous bornerons à citer les principaux travaux qui ont un rapport assez étroit avec la variation des latitudes.

W. Hopkins est le premier qui se soit occupé de la question. Dans trois Mémoires (**) il a cherché s'il était légitime de sup-

---

(*) G.-H. Darwin, *The Tides*, Londres, 1898, et Sw. Arrhenius, *Kosmische Physik*, Leipzig, 1903.

(**) *Philosophical Transactions*, Londres, 1839, 1840 et 1842.

poser, comme le faisaient beaucoup de géologues, que la Terre se composât d'une masse fluide recouverte d'une mince croûte solide. En se basant sur les mouvements de précession et nutation luni-solaires, il a conclu que la Terre devait posséder une écorce solide, d'épaisseur au moins égale au cinquième de son rayon.

La conclusion de Hopkins a donné lieu à de vives controverses ; on lui reprochait de négliger le frottement et d'admettre implicitement que, pendant la solidification de la surface du fluide incandescent qui devait former la croûte, les molécules n'éprouvassent aucune modification de position relative. H. Hennessy (*) prétendait qu'un globe, composé d'un noyau fluide et d'une mince écorce rigide, devrait avoir le même mouvement qu'une Terre rigide (**) ; Delaunay défendait la même opinion (***) en s'appuyant sur une expérience de laboratoire : en sorte que, d'après eux, l'étude des circonstances du mouvement du globe ne pouvait rien nous apprendre de contraire à l'hypothèse prémentionnée.

Airy (iv), H. Faye (v), A. Ritter (vi) ont plaidé aussi en faveur de cette opinion en s'appuyant principalement sur des considérations cosmogoniques.

Les résultats de Hopkins, ou plutôt ses hypothèses et ses considérations mécaniques ont été attaquées, à un autre point de vue, par J.-G. Barnard (vii) et W. Thomson (viii).

(*) *Philosophical Transactions*, Londres, 1851 ; *Comptes rendus*, Paris, mars 1871 ; *Nature*, Paris, 1872.

(**) Voyez aussi Plana, *Astronomische Nachrichten*, nos 860 et 861, mai 1853.

(***) *Comptes rendus*, juillet 1868.

(iv) *The Interior of the Earth.* (Ad. Cambridge Assoc., 1878, et Nature, t. XVIII, 1878.)

(v) *Comptes rendus*, passim.

(vi) *Ann. de Wiedemann*, 1879.

(vii) *Problems of rotary motions.* (Smiths. Contrib. to Knowledge, t. XIX, 1874.)

(viii) *On the rigidity of the Earth.* (Philosophical Transactions, Londres, 1863.)

Cependant ce dernier affirmait (*) que, bien que les raisonnements de Hopkins ne fussent pas concluants, on ne pouvait pas supposer qu'il existât à l'intérieur de la Terre une masse liquide continue sphéroïdale possédant au moins 5 kilomètres de rayon, sans qu'il en résultât des modifications sensibles dans certains phénomènes.

Il faut du reste observer que Hopkins admettait que la croûte terrestre restait entièrement rigide et invariable de forme, ce qui est physiquement impossible. En effet aucune substance ne possède une rigidité parfaite, comme l'ont montré les expériences de Tresca (**), de Saint-Venant et de Kohlrausch. Il s'ensuit que l'écorce, même épaisse, doit être de toute nécessité flexible et doit, par conséquent, céder, dans une certaine mesure, aux marées que l'attraction luni-solaire ne manquera pas de provoquer en agissant sur l'intérieur fluide. Reste à savoir si ces marées terrestres (*bodily tides*) sont sensibles (***). La croûte terrestre et la mer, qui la recouvre partiellement, se soulèvent-elles ensemble de quantités du même ordre? Nous ne nous apercevrions alors que du soulèvement relatif de l'Océan, c'est-à-dire d'une marée « différencielle » peu sensible, puisque nous subirions les mouvements de la croûte. A ce sujet, W. Thomson (IV) donne les indications suivantes : si la Terre était une sphère de verre massive, son élasticité ferait que la marée océanique actuelle serait réduite aux deux cinquièmes de sa valeur; si elle était en acier, cette marée serait réduite aux deux tiers. Il montre ainsi que la Terre est beaucoup plus rigide, dans son ensemble, que le verre, que l'acier, qu'une roche quelconque : selon son avis, l'hypothèse d'après laquelle le globe se composerait d'une

---

(*) *Idem.* Voyez aussi *Math. and phys. Papers*, t. III, art. 45, et *Popular Lectures*, t. III, p. 238.

(**) *Mémoires des savants étrangers*, Paris, t. XVIII.

(***) Voyez à ce sujet M. Lévy, *Théorie des marées*, t. II.

(IV) *Op. cit.* En outre *Treatise on natural Philosophy*, t. II, 1883, art. 843.

masse liquide de roches et métaux fondus, recouverte d'une écorce mince, *serait absolument à rejeter* (*).

Cette opinion est aussi celle de G.-H. Darwin, qui s'est attaché à développer les considérations de Thomson dans une série de Mémoires.

Dans le premier (**) de ces Mémoires, il a déterminé les hauteurs que peuvent atteindre les marées océaniques, au cas où l'on suppose le globe se composer d'un liquide élastique et incompressible. Il est arrivé aux mêmes conclusions que Thomson, à savoir que les marées océaniques ne pourraient atteindre, dans ce cas, qu'une fraction de ce qu'elles atteindraient dans l'hypothèse d'un intérieur rigide; cette fraction serait d'autant plus petite que le frottement et la viscosité seraient plus faibles (***).

Au contraire, H. Hennessy (iv) continuait à défendre l'hypothèse d'un intérieur fluide, adoptée d'ailleurs par la plupart des géologues. Selon lui, la Terre aurait un noyau fluide visqueux compressible; cela pourrait expliquer les petites anomalies des marées océaniques et serait du reste conforme à l'accroissement de la densité en profondeur.

Dans un Mémoire postérieur (v) G.-H. Darwin a étudié la rotation d'un sphéroïde visqueux et complètement élastique sous l'influence de forces extérieures. Six ans plus tard, S. Oppenheim (vi) s'est placé aussi à ce point de vue.

(*) W. Thomson critiquait encore les vues de Hopkins au moyen de la théorie de la précession et de la nutation; mais, en 1876, il a déclaré lui-même qu'il retirait l'argument basé sur cette théorie, argument qui avait du reste été combattu par Delaunay, et en a invoqué un autre reposant sur l'existence de frottements dus à des mouvements tourbillonnaires du fluide.

(**) *On the bodily tides of viscous and semielastic spheroids.* Phil. Trans., Londres, 1879, part I.)

(***) Voyez à ce sujet K. Zöppritz, *Der gegenwärtige Standpunkt der Geophysik.* (Geographisches Jahrbuch, 1880, Gotha.)

(iv) *Philosophical Magazine*, 5e série, t. VI, Londres, 1878.

(v) *On the precession of a viscous spheroid and on the remote history of the Earth.* (Philosophical Transactions, Londres, 1879, part. II.)

(vi) *Sitzungsberichte der K. Ak. der Wiss.*, Vienne, 1885, part. II; *Astr. Nach.*, 1885, n° 2781.

Parmi les Mémoires (*) de G.-H. Darwin, citons spécialement celui de 1882 (**), où il attaquait l'hypothèse d'une mince écorce en s'appuyant sur la théorie de la résistance des matériaux : à une profondeur de 1600 kilomètres la croûte solide devrait avoir une rigidité semblable à celle du granit pour pouvoir résister aux efforts.

Plusieurs géologues ont avancé une hypothèse, en quelque sorte intermédiaire entre les deux extrêmes : fluidité complète, rigidité absolue ; ils supposaient que le globe se composait d'un noyau solide séparé de la croûte externe par une couche plus au moins épaisse d'un liquide visqueux ou d'une matière pâteuse (***). La croûte et le noyau pourraient ainsi avoir des mouvements quelque peu distincts (iv). E. Ronkar a étudié dans un Mémoire (v) le problème de la rotation de la Terre, en la supposant composée de cette façon. Dans son étude, il tenait compte du frottement du noyau et de l'écorce sur la couche intermédiaire : il est arrivé ainsi à des théorèmes intéressants sur le détail desquels nous ne pouvons pas entrer ici.

L'hypothèse en question a été surtout étudiée par E. Wiechert (vi); celui-ci, en coordonnant et combinant les données astronomiques, géodésiques et physiques, proposait de regarder

---

(*) *The determination of the secular effects of tidal frictions.* (Proceed. of R S.. Londres, t. XXIX.) — *The det of the sec effects of the orbits.* (Ibid., t. XXX.) — *Problems connected with the tides of a viscous spheroid.* (Phil. Trans., Londres, 1880), etc.

(**) *On the stresses caused in the interior of the Earth.* (Phil. Trans., Londres, 1882)

(***) Voyez à ce sujet les polémiques de F. Folie relatives à la nutation diurne.

(iv) Voyez, par exemple, F. Folie, *Bull. Acad. Roy. Sc.*, Bruxelles, 3e série, t. II, 1881, et Fisher, *Geological Magazine*, Londres, 1878 ; *Cambridge Transactions*, 1878, et *Philosophical Magazine*. Londres, 1882

(v) *Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles...*, Bruxelles, 1888. Voyez aussi *Bull. astr.*, t. VII, avril 1890, p. 165.

(vi) *Ueber die Massenverteilung im Innern der Erde.* (Nachrichten der K. Gesellsch.. Gottingue, 1897. 3e fasc., p. 221.) Voyez aussi G. H. Darwin, *Monthly Notices*, Londres, 1899, t. LX, n° 2, et F.-R. Helmert, *Sitzb. der K. Ak d. Wiss* , Berlin, 1901, p. 328.

la Terre comme hétérogène et composée d'un noyau en fer, d'une couche plastique sus-jacente et d'une écorce peu dense (de 1400 kilomètres d'épaisseur environ) entourant ce noyau et cette couche. Cette hypothèse satisferait, semble-t-il, aux exigences des arguments de Thomson, tout en empêchant les critiques d'autres savants.

[Nous verrons, dans l'Appendice, qu'en 1903 R. Schumann a invoqué cette théorie pour expliquer la provenance du terme de Kimura, intervenant dans la variation de latitude.]

* * *

Il n'est pas nécessaire de faire observer que ces divers résultats concernent bien plus la géophysique (*), prise dans son acception la plus générale, que la variation des latitudes. Il est temps maintenant d'indiquer ceux qui regardent plus directement cette dernière.

Dans un beau Travail (**), adressé à l'Observatoire de Poulkowa à l'occasion de son cinquantenaire, J.-V. Schiaparelli a envisagé l'influence d'actions perturbatrices (telles que celles dont nous voulons parler dans la Troisième partie), par exemple géologiques, sur la position des pôles d'un sphéroïde supposé successivement *rigide, plus ou moins plastique* et *parfaitement plastique*. Ce dernier état de choses est représenté avec une certaine approximation par l'hypothèse de la plupart des géologues, d'après laquelle la Terre serait entièrement fluide et seulement recouverte d'une croûte solide très mince; le cas d'un noyau solide séparé de la croûte par une couche liquide et pâteuse peut aussi, jusqu'à un certain point, être rangé dans cette subdivision de l'étude. Schiaparelli trouve que, dans l'hypothèse

---

(*) Voyez à ce sujet l'excellente thèse de P. Schwahn : *Ueber Aenderungen der Lage der Figur- und der Rotationsaxe der Erde, sowie einige mit dem Rotationsproblem in Beziehung stehende geophysische Probleme*, Berlin, juin 1887, § 12.

(**) *De la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques*, Saint-Pétersbourg, 1889; *Il Nuovo Cimento*, 1891, 3e série, t. XXX.

de la parfaite plasticité, des phénomènes accidentels peuvent très bien imprimer aux pôles de grands mouvements irréguliers d'une amplitude quelconque. Relativement à l'étude de la rotation d'un globe doué d'une plasticité relative, ce savant obtient aussi des résultats très intéressants d'après lesquels les mouvements des pôles pourraient encore avoir une grande amplitude si l'on supposait que la viscosité du globe fût assez faible.

Dans sa célèbre Note de 1892 (*), déjà citée, S. Newcomb a montré que, si l'on fait entrer en ligne de compte l'élasticité de la Terre et la mobilité de l'Océan (**), la contradiction entre la théorie eulérienne et l'observation (au moins celle qui existe entre les périodes de dix et de quatorze mois) peut très bien disparaître. En reprenant les considérations de W. Thomson (***), il a conclu que la Terre devait céder un peu moins à l'action de la force centrifuge que si elle possédait la rigidité de l'acier et que, par conséquent, considérée dans son ensemble, *elle doit être un peu plus rigide que l'acier*. Cette conclusion est d'ailleurs en plein accord avec les déductions des sismologistes (iv). Elle a été commentée et expliquée par S. Hough, J. Larmor et A. Sommerfeld.

Dans deux Mémoires (v), Th. Sloudsky a repris les considérations de W. Hopkins en s'inspirant des nouvelles théories de l'Hydrodynamique, et en a donné un beau complément. Voici l'hypothèse dans laquelle il s'est placé : il supposait que la Terre était constituée d'une masse liquide incompressible et homogène, entourée d'une écorce parfaitement rigide, et que, de plus, les centres de gravité et les axes principaux de la masse

---

(*) *On the Dynamics of the Earth's Rotation* (Monthly Notices, Londres, t. LII, 1892.)

(**) La mobilité de l'océan expliquerait le quart de la différence.

(***) *Treatise on natural Philosophy*, t. II, 1883.

(iv) Voyez Milne : *On Earthquake Phenomena*. (British Assoc. Report, 1896.)

(v) *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou*, 1895, n° 2. et 1896, n° 1.

liquide et de l'ensemble (masse liquide et écorce) coïncidaient. Il a trouvé que, dans ce cas, le mouvement du pôle devait avoir deux périodes : l'une un peu plus courte que le jour sidéral, l'autre d'un nombre N de jours donné par

$$\frac{1}{N} = \frac{C_1 - A_1}{A_1} + qe^2,$$

où $A_1 = B_1$ et C_1 sont les moments principaux d'inertie de la croûte solide, $q = \frac{Md^2}{5A_1}$ et e désigne l'excentricité du noyau liquide; dans l'expression de q, M désigne la masse du liquide et d le demi-grand axe de la cavité interne de la croûte. Sloudsky n'a pas cherché à appliquer ses formules à des exemples numériques, car il pensait avoir soumis son problème à des conditions trop restrictives pour qu'il fût légitime d'en appliquer la solution à la Terre (*). Dans son second Mémoire, il a fait voir que, si les axes principaux du noyau restent parallèles à ceux de l'ensemble, les conclusions de son premier Mémoire peuvent encore tenir debout lorsque les deux centres de gravité ne coïncident pas. Il a montré, en outre, qu'aucun effet sensible ne peut être produit par une légère inclinaison de l'axe polaire de la cavité sur l'axe d'inertie principal. Enfin Sloudsky s'est occupé aussi de l'effet des mers; en supposant qu'un liquide homogène recouvrît entièrement la croûte rigide, il a prouvé encore que ce liquide ne pouvait produire d'effet sensible que si l'axe de rotation était fortement incliné sur l'axe principal polaire.

S.-S. Hough a publié plusieurs Mémoires (**) sur la rotation

(*) Cependant L. Picart, en s'appuyant sur les formules du savant russe, a montré (*Bulletin astronomique*, t. XVII, juin 1900, p. 222) que l'existence de la période chandlérienne de quatre cent vingt-sept jours s'oppose à l'hypothèse d'un noyau fluide peu considérable et d'une excentricité très faible. Toutefois cette conclusion ne peut s'appliquer au cas où l'on suppose le noyau suffisamment aplati.

(**) *On the oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid.* (Phil. Trans, Londres, 1895, t. CLXXXVI, part. *A*.) Voyez aussi *Math. Soc. Proceedings*, Londres, t. XXVIII, 1897; *On the rotation of an elastic spheroid. Phil. Trans.*, Londres, 1896, t. CLXXXVII, part. *A*. Voyez aussi *Monthly Notices*, Londres, 1897.

des sphéroïdes élastiques. Dans le premier, il a traité le même problème que Sloudsky et est arrivé à cette conclusion que, si l'on veut supposer la Terre en partie fluide au lieu de la considérer comme entièrement solide, la période du cycle eulérien doit être diminuée, ce qui est contraire aux résultats de l'observation (quatorze mois au lieu de dix mois).

Dans son second Travail, qu'il a d'ailleurs publié avec I. Newton, Hough a repris et complété les considérations de Newcomb en leur donnant une forme plus mathématique et en corrigeant une erreur dont elles étaient affectées. En supposant la Terre entièrement solide, mais formée d'une substance plus ou moins élastique, il a conclu, d'accord avec le célèbre astronome américain, que l'augmentation de la période eulérienne peut être attribuée à l'élasticité de la Terre et que l'on peut provisoirement expliquer l'existence de la période chandlérienne en admettant que la Terre soit un peu plus rigide que l'acier.

Enfin Hough pensait que les résultats obtenus seraient peu altérés si l'on faisait entrer en ligne de compte la mobilité de l'Océan et de l'atmosphère.

En 1896, S. Woodward (*) (outre un aperçu sur les travaux de ses devanciers) a montré que, si la différence $B - A$ entre les moments d'inertie équatoriaux de la Terre est suffisamment grande, le cycle eulérien peut être diminué; il a également étudié l'influence des mers sur la durée du cycle.

La même année, J. Larmor a fait plusieurs remarques intéressantes (**) et intuitives sur la rotation des sphéroïdes élastiques. Il a montré que la période du mouvement du pôle instantané d'un tel sphéroïde est sensiblement la même que celle d'un sphéroïde rigide dont la forme est celle que prendrait le premier sphéroïde si sa rotation devenait nulle (***). Outre plusieurs remarques sur le moyen de déduire, des données

---

(*) *Astronomical Journal*, 1896, t. XV, n° 345.

(**) *On the Free Eulerian Procession.* (Proceedings of Cambridge Phil. Society, t. IX, mai 1896.)

(***) Voir le § 3 de cette deuxième partie.

d'observation, des indications sur la constitution interne du globe, il a fait voir que la déformation que la Terre devrait subir pour expliquer certaines anomalies, doit être en grande partie *élastique* plutôt que *visqueuse*. Quant à l'influence des mers, Larmor a calculé que, si l'Océan recouvrait entièrement une Terre rigide, la période eulérienne augmenterait de 14 °/₀ : c'est une limite supérieure évidemment, car les mers ne couvrent pas entièrement le globe; de plus, ces 14 °/₀ doivent être réduits à 8 °/₀, voire à 6 °/₀, parce que la déformation élastique de la Terre a pour conséquence de diminuer l'effet dû à l'ellipticité de l'Océan. Enfin le savant anglais pensait qu'une certaine hétérogénéité de la Terre ne devait pas infirmer la conclusion de Newcomb et de Hough, à savoir que le globe doit posséder, dans son ensemble, une rigidité comparable à celle de l'acier.

Dans la seconde partie d'un superbe Mémoire (*) consacré à l'étude de l'influence de *mouvements cycliques* sur la rotation de la Terre, V. Volterra a traité analytiquement les considérations de G.-H. Darwin et de J.-V. Schiaparelli sur la plasticité de la Terre, en supposant que, par suite d'un certain état physique du globe, le pôle d'inertie tende à se rapprocher du pôle de rotation avec une vitesse proportionnelle à la distance qui les sépare (**) et en imaginant qu'aient lieu en même temps des mouvements cycliques à l'intérieur de la Terre; il a déduit plusieurs théorèmes intéressants que nous ne pouvons rapporter ici.

Enfin A. Sommerfeld, dans un Ouvrage (***) devenu célèbre, a étudié d'une façon complète l'influence de l'élasticité de la Terre sur la période eulérienne; nous ne développons pas ici ses raisonnements ni ses conclusions, car nous suivrons, dans

---

(*) *Sur la théorie des variations des latitudes* (Acta Mathematica, t. XXII, 1898, chap. VI.)

(**) Voyez G.-H. Darwin, *Influence of the geological changes* (Phil. Trans., Londres, 1877, t. CLXVII, p. 281); voyez aussi J.-V. Schiaparelli, *De la rotation de la Terre...*, Saint-Pétersbourg, 1889, art. 3.

(***) *Ueber die Theorie des Kreisels*, 3ᵉ fasc., 1903, chap. VIII, section *B*.

les paragraphes suivants, sa méthode, qui résume d'ailleurs les travaux de ses devanciers d'une manière très nette.

§ 2. *Influence de l'élasticité de la Terre sur la position de son axe de figure et sur son ellipticité.*

Dans ce qui suit nous supposons que la Terre, sans rotation, affecte la forme d'un *ellipsoïde de révolution très peu aplati* et que la matière homogène qui la compose soit *solide, mais possède cependant un certain degré d'élasticité.* Il appert dès maintenant que, si la Terre se met à tourner uniformément et lentement autour de son axe de révolution, la force centrifuge qui naît de ce mouvement luttera contre l'élasticité de la substance et fera prendre au globe une autre figure d'équilibre, qui sera un ellipsoïde de révolution *un peu plus aplati* que l'ellipsoïde originaire (*).

* * *

Désignons par a, a, c les demi-axes de l'ellipsoïde de révolution aplati, qui est la forme supposée de la Terre lorsqu'elle n'a pas de rotation o autour de l'axe $2c$. Les moments principaux d'inertie sont :

$$\left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{M}{5}(b^2 + c^2) = \dfrac{M}{5}(a^2 + c^2), \\ B = \dfrac{M}{5}(a^2 + c^2) = A, \\ C = \dfrac{M}{5}(a^2 + a^2) = \dfrac{2}{5}Ma^2, \end{array}\right.$$

où M désigne la masse $\frac{4}{3}\pi a^2 c\rho$ de l'ellipsoïde, supposé homogène

(*) Au moins aux termes du second ordre près.

(Tout ce que nous allons développer dans ce paragraphe et le suivant n'est vrai qu'à cette approximation.)

C'est un lemme que nous demandons d'admettre pour tout ce qui va suivre.

de densité ρ. L'*excentricité* est par définition la quantité positive e donnée par

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2},$$

tandis qu'on réserve le nom d'*aplatissement* à la quantité positive

$$p = \frac{a - c}{a}.$$

Nous appelons, avec Sommerfeld, *ellipticité* la quantité positive

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}.$$

Cette ellipticité ε est liée à l'excentricité par la relation :

$$e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{a^2 - a^2\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}{a^2} = \frac{1+\varepsilon-1+\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

$$\text{ou} \quad e = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}},$$

mais elle ne diffère de l'aplatissement p que par des termes du second ordre en p :

$$\varepsilon = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{a^2 - a^2(1-p)^2}{a^2 + a^2(1-p)^2} = \frac{2p - p^2}{2 - 2p + p^2} = p + \frac{p^2}{2} - \frac{p^4}{4} + \cdots.$$

Comme nous supposons l'ellipsoïde terrestre très peu aplati, p peut être considéré comme une quantité très petite du 1er ordre, et les termes d'ordres supérieurs du premier peuvent être négligés; par suite nous écrirons avec ce degré d'approximation :

$$\varepsilon = p.$$

Nous négligeons aussi les termes en ε d'ordres supérieurs au premier.

* * *

Prenons pour axe Oz le petit axe (axe de révolution) $2c$ et pour axes Ox, Oy deux axes rectangulaires quelconques situés dans l'équateur de l'ellipsoïde : O est le centre de figure et de gravité de ce dernier.

L'équation cartésienne de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Soient un méridien zPU de l'ellipsoïde coupant le plan de l'équateur suivant OU, et un point P (x, y, z) pris sur ce méridien. Les coordonnées polaires du point P sont :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{la distance } r \text{ de O à P,} \\ \text{la latitude } \vartheta = \text{angle UOP,} \\ \text{la longitude } \lambda = \text{angle AOU.} \end{array}\right\} \text{(A désigne l'extrémité de l'axe } Ox\text{).}$$

Nous avons évidemment les formules de transformation de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\vartheta\cos\lambda, \\ y = r\cos\vartheta\sin\lambda, \\ z = r\sin\vartheta, \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ x^2 + y^2 = r^2\cos^2\vartheta, \\ z^2 = r^2\sin^2\vartheta. \end{array}\right\}$$

L'équation polaire de l'ellipsoïde est par suite :

$$\frac{r^2\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\vartheta}{c^2} = 1$$

ou

$$c^2r^2\cos^2\vartheta + a^2r^2(1 - \cos^2\vartheta) = a^2c^2$$

ou

$$r^2 = \frac{a^2c^2}{c^2\cos^2\vartheta + a^2(1 - \cos^2\vartheta)} = \frac{a^2c^2}{a^2 - (a^2 - c^2)\cos^2\vartheta}$$
$$= \frac{c^2}{1 - e^2\cos^2\vartheta} = \frac{c^2}{1 - \dfrac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}\cos^2\vartheta};$$

d'où

$$r = c\left[1 - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\cos^2\vartheta\right]^{-\frac{1}{2}} = c(1 + \varepsilon\cos^2\vartheta) \quad (1),$$

en se limitant au terme du premier ordre en ε.

Cette équation est aussi l'équation polaire (dans le plan) de la section méridienne.

Pour $\vartheta = o$, on a :

$$a = c(1 + \varepsilon) \quad (2).$$

Appelons à présent *rayon moyen* R de l'ellipsoïde le rayon d'une sphère ayant même volume que lui ; alors :

$$R^3 = a^2c = c^2(1+\varepsilon)^2 c = c^3(1+2\varepsilon),$$

d'où

$$R = c(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{3}} = c\left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon\right) \quad (3),$$

ou inversement

$$c = R(1+2\varepsilon)^{-\frac{1}{3}} = R\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) \quad (4).$$

Introduisons dans (1) la valeur (4) du demi-petit axe c en fonction du rayon moyen R, nous obtiendrons l'équation polaire de la section méridienne sous la forme :

$$r = R\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)(1 + \varepsilon\cos^2\vartheta) = R\left[1 + \varepsilon\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right)\right] \quad (5).$$

* * *

Supposons maintenant que la Terre soit animée de la rotation uniforme o autour de son petit axe Oz; nous avons admis que la nouvelle forme d'équilibre que l'ellipsoïde terrestre I prendra est encore un ellipsoïde de révolution I' *un peu plus aplati* que lui-même (c'est-à-dire que a augmentera, c diminuera, $p = 1 - \frac{c}{a}$ augmentera aussi, et il en sera de même pour $\varepsilon = p$). Désignons

par ε' l'augmentation d'ellipticité qui en résulte (*), en sorte que $E = \varepsilon + \varepsilon'$ est l'ellipticité que la Terre prend lorsque la rotation a lieu.

Nous négligerons encore les termes en ε' et $\varepsilon + \varepsilon'$ d'ordres supérieurs au premier. Alors l'équation polaire du méridien du nouvel ellipsoïde de révolution sera

$$r = R\left[1 + (\varepsilon + \varepsilon')\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right)\right] \quad (6),$$

le rayon moyen étant le même puisque la masse n'a pas changé.

* * *

Examinons à présent ce qui se passe pour un globe élastique tournant, lorsque l'axe de rotation OI (passant toujours par son centre O) ne coïncide plus exactement avec le petit axe OC de l'ellipsoïde terrestre primitif I, mais en reste cependant *très voisin* (fig. 4).

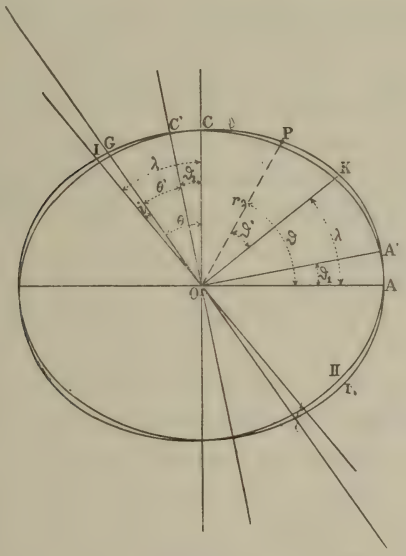


Fig. 4.

(*) Cette ellipticité ε' est, d'après le principe de la superposition des petites déformations, celle que prendrait, sous l'action de la force centrifuge

Désignons par λ (*) l'angle très petit IOC. L'action de la force centrifuge due à la rotation uniforme o autour de OI tend à déformer l'ellipsoïde élastique, qui, avant la rotation, est de révolution autour de OC et a l'ellipticité ε, et à lui faire prendre une nouvelle forme d'équilibre (qui est un ellipsoïde de révolution autour de OI) : mais le globe n'étant pas parfaitement plastique (seulement quelque peu élastique), cette tendance se composera avec l'inertie de l'ellipsoïde primitif pour déterminer la formation d'une nouvelle configuration d'équilibre, intermédiaire entre les ellipsoïdes respectivement de révolution autour de OC et de OI; cette nouvelle figure sera — nous l'admettrons — encore un ellipsoïde de révolution aplati II ayant pour axe de révolution un axe OC′, situé dans le plan COI et intermédiaire entre OC et OI, et d'autant plus voisin de OI que le globe est plus élastique. Il s'agit de déterminer les axes de ce nouvel ellipsoïde, son ellipticité et la position exacte de son axe OC′ de révolution. Pour cela nous devons d'abord obtenir son équation polaire (ou, ce qui est la même chose, l'équation polaire de sa section méridienne).

Appelons donc, comme ci-dessus, I l'ellipsoïde terrestre primitif de révolution autour de OC et d'ellipticité ε;

III l'ellipsoïde de révolution autour de OI et d'ellipticité ε' (**), qui serait la forme d'équilibre du globe, si ce dernier était *primitivement sphérique* (tout en ayant la même masse) et animé de la rotation uniforme o autour de OI;

II l'ellipsoïde en question, de révolution autour de OC′ et d'ellipticité E (encore inconnue), qui est la forme d'équilibre intermédiaire cherchée.

Désignons (fig. 4) par OK la perpendiculaire en O à OI, située dans le plan COI et du même côté de OI que OA (à partir duquel nous comptons les latitudes ϑ). Si P est un point de la

---

due à la rotation o, une *sphère* élastique composée de la même matière que notre ellipsoïde.

(*) Ne pas confondre cette notation avec celle employée précédemment pour désigner la longitude.

(**) Voyez une note précédente.

section méridienne de l'ellipsoïde III, si r' désigne la distance OP et si ϑ' désigne la latitude de P comptée à partir de OK (au lieu de OA), égale par conséquent à la latitude ϑ = angle AOP diminuée de l'angle très petit AOK = λ, l'équation polaire de la section méridienne de cet ellipsoïde III sera, d'après (5),

$$r' = R\left\{1 + \varepsilon'\left[\cos^2\vartheta' - \frac{2}{3}\right]\right\}$$
$$= R\left\{1 + \varepsilon'\left[\cos^2(\vartheta - \lambda) - \frac{2}{3}\right]\right\} \quad (7),$$

le rayon moyen R étant le même que plus haut.

Ayant l'équation polaire de III, il nous est facile de déduire celle de l'ellipsoïde II en question. Cet ellipsoïde résultera de la déformation (sphère — III) appliquée à l'ellipsoïde primitif. Pour obtenir l'équation polaire de sa section méridienne, il nous suffit d'écrire que son rayon vecteur r_2 est la somme algébrique de deux parties :

1° Le rayon vecteur r de l'ellipsoïde I donné par

$$r = R\left[1 + \varepsilon\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right)\right] \quad (5),$$

2° La déformation $r' - R$ du rayon vecteur de la sphère qui passe à l'état III, déformation qui est donnée par (7) ou

$$r' - R = \varepsilon' R\left[\cos^2(\vartheta - \lambda) - \frac{2}{3}\right] \quad (8).$$

Cette équation polaire sera

$$r_2 = R\left[1 + \varepsilon\cos^2\vartheta + \varepsilon'\cos^2(\vartheta - \lambda) - \frac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right] \quad (9).$$

Il nous est facile maintenant de connaître la position exacte de l'axe OC' autour duquel cet ellipsoïde II est de révolution. A cette fin, nous déterminerons les sommets de l'ellipse méridienne en écrivant

$$\frac{dr_2}{d\vartheta} = 0,$$

puisqu'en ces sommets le rayon vecteur passe par un maximum ou par un minimum. En développant cette condition, nous avons :

$$-\varepsilon \cos\vartheta \sin\vartheta - \varepsilon' \cos(\vartheta - \lambda) \sin(\vartheta - \lambda) = 0;$$

comme nous supposons λ très petit, nous pouvons écrire

$$\sin\lambda = \lambda, \quad \cos\lambda = 1,$$

et par suite

$$\varepsilon \cos\vartheta \sin\vartheta + \varepsilon' [\cos\vartheta + \lambda \sin\vartheta][\sin\vartheta - \lambda \cos\vartheta] = 0,$$

ou en négligeant λ^2 :

$$(\varepsilon + \varepsilon') \cos\vartheta \sin\vartheta - \varepsilon'\lambda(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0,$$

ou bien

$$\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \sin 2\vartheta = \varepsilon'\lambda \cos 2\vartheta,$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = 2 \frac{\varepsilon'\lambda}{\varepsilon + \varepsilon'} \quad (10).$$

Puisque λ est très petit, l'un des deux angles déterminés par cette équation (et compris entre 0 et π) est très voisin de zéro, et l'autre très voisin de $\frac{\pi}{2}$. Appelons ϑ_1, ϑ_2 respectivement le premier et le second de ces angles ; alors

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{\pi}{2}.$$

L'angle ϑ_1 correspond à un axe équatorial OA′ intermédiaire entre OA et OK, puisque l'on a au degré d'approximation voulu :

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\varepsilon'\lambda}{\varepsilon + \varepsilon'} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \lambda < \lambda;$$

l'angle ϑ_2 correspond à l'axe polaire OC′ cherché, intermédiaire entre OC et OI (pour la même raison).

Enfin calculons les axes et l'ellipticité de l'ellipsoïde II.

Pour déterminer les axes, nous n'avons qu'à poser dans (9) successivement $\vartheta = \vartheta_1$, $\vartheta = \vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{\pi}{2}$, valeurs auxquelles correspondront respectivement les demi-axes équatorial et polaire de II :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = R\left[1 + \varepsilon + \varepsilon' - \frac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right] = R\left[1 + \frac{1}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right], \\ \\ c_2 = R\left[1 - \frac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right], \end{array} \right\} \quad (11)$$

aux termes en ϑ_1^2 près (ϑ_1 étant inférieur à λ).

Or ces demi-axes sont ceux

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1' = R\left[1 + \frac{1}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right], \\ \\ c_1' = R\left[1 - \frac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right] \end{array} \right\} \quad (12)$$

de l'ellipsoïde I′, forme que prendrait l'ellipsoïde primitif I si la rotation o se produisait autour de OC : comme on le voit d'après (6).

Par conséquent *les deux ellipsoïdes II et I′ sont égaux et ne diffèrent que par leur position* (fig. 4) : II est de révolution autour de OI, I′ autour de OC. Au moyen d'une rotation de λ autour de O, on pourrait ainsi amener ces deux ellipsoïdes en coïncidence.

Ainsi, *aux termes en λ du second ordre près, l'ellipsoïde d'équilibre correspondant à une rotation o autour de OC ou autour d'un axe OI (faisant avec OC l'angle λ) est le même quel que soit λ ; seulement son axe de symétrie varie de position : cette dernière est du reste déterminée par la valeur de l'angle $\vartheta_1 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\lambda$.*

Les moments principaux d'inertie de l'ellipsoïde II sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l} A' = B' = \dfrac{M}{5}(a_2^2 + c_2^2) = \dfrac{2M}{5} R^2 \left[1 - \dfrac{1}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right], \\ C' = \dfrac{M}{5} \times 2a_2^2 = \dfrac{2M}{5} R^2 \left[1 + \dfrac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right]; \end{array}\right. \quad (13)$$

son ellipticité est :

$$E' = \frac{C' - A'}{A'} = \frac{1 + \dfrac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon') - 1 + \dfrac{1}{3}(\varepsilon + \varepsilon')}{1 - \dfrac{1}{3}(\varepsilon + \varepsilon')} = \varepsilon + \varepsilon' = E \quad (14).$$

* * *

En étudiant, dans l'Introduction, la rotation naturelle de la Terre supposée *absolument rigide*, nous avons conclu que les trois axes OI (instantané de rotation), OG (du couple résultant des quantités de mouvement), OC (principal d'inertie polaire) sont constamment dans un même plan qui tourne *dans l'espace* autour de OG avec une vitesse uniforme dans le sens direct, que les angles $i = IOG$, $\theta = GOC$ sont constants, que $\frac{i}{\theta} = \frac{1}{305}$ environ et que OG se trouve toujours entre OI et OC.

Voyons maintenant ce qui se passe pour un globe *doué d'une certaine élasticité*. Supposons que la Terre, *au repos*, ait la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati I, d'ellipticité ε, et qu'à un moment donné ou lui imprime une rotation o (qui restera uniforme) autour d'un axe OI faisant un angle $IOC = \lambda = i + \theta$ (très petit) avec l'axe de révolution OC de l'ellipsoïde primitif I. Sous l'influence de cette rotation uniforme o, l'ellipsoïde terrestre I prend une nouvelle forme d'équilibre, qui est aussi un ellipsoïde de révolution aplati II : cet ellipsoïde est plus aplati que I et son ellipticité est $E = \varepsilon + \varepsilon'$ (*) ; de plus,

(*) ε' ayant la signification précédemment indiquée.

son axe de révolution n'est plus OC, mais un nouvel axe OC′, situé dans le plan COI, intermédiaire entre OC et OI et faisant avec OC l'angle $\vartheta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\lambda$ (fig. 4).

Après l'impulsion communiquée au globe, la rotation est *naturelle* (en négligeant les forces extérieures) : le moment résultant des quantités de mouvement est constant en grandeur et direction, et son support OG est fixe *dans l'espace*. Le plan OCC′GI des quatre droites OC, OC′, OG, OI tournera encore autour de OG avec une vitesse angulaire directe et uniforme, et OI restera très voisin de OG (*).

La seule modification que l'élasticité de la Terre introduit est que l'ellipticité augmente de ε' et que l'axe de révolution OC′ de la nouvelle figure d'équilibre se rapproche un peu de l'axe OI et, par conséquent, de l'axe OG.

§ 3. — *Variation de la période eulérienne due à l'élasticité de la Terre.*

Dans l'Introduction, nous avons vu que la période eulérienne du mouvement de circulation du pôle I autour du pôle de figure C *à la surface de la Terre* était donnée par

$$T = \frac{2\pi}{|r|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{C-A}{A}n\right|} = \frac{2\pi}{|n|}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{|o|}\frac{1}{\varepsilon}\sec(i+\theta).$$

Or $\sec(i+\theta)$ est très voisin de l'unité et $|o| = 2\pi$ par jour sidéral. Donc

$$T = \frac{1}{\varepsilon} \text{ jours sidéraux, soit environ 305 jours,}$$

pour un globe *parfaitement rigide*.

(*) Cela suppose, bien entendu, que la rotation de ce plan est suffisamment lente, vis-à-vis de la rotation propre du globe, pour que l'adaptation élastique ait lieu pour chaque position de l'axe OC dans l'espace. [Voyez page suivante.]

Actuellement si nous supposons la Terre *douée d'une certaine élasticité*, l'ellipticité devient $E = \varepsilon + \varepsilon'$, le pôle de figure se rapproche *dans l'espace* du pôle G en venant en C' : *à la surface du globe* le pôle de rotation I semble se rapprocher du pôle de figure instantané C' (*). La période de son mouvement de circulation autour du pôle de figure primitif C sera-t-elle $\frac{1}{E}$ jours?

Pour tout ce qui suit, nous supposerons que *la période de ce mouvement est toujours très longue vis-à-vis de celle du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même*, en sorte que l'augmentation ε' de l'ellipticité et le déplacement de l'axe de figure, dus à l'action centrifuge de la rotation o sur un globe élastique, aient le temps de se produire pour chaque position de l'axe de rotation OI dans ce globe.

Nous allons montrer que *la période du mouvement du pôle de rotation I autour du pôle de figure primitif C (fixe à la surface de la Terre) est égale à celle du pôle de rotation du même globe au cas où l'on supposerait que la rotation de ce dernier cessât brusquement et qu'il reprît son ellipticité primitive* ε; autrement dit cette période est, aux termes contenant les ellipticités au second ordre près,

$$T' = \frac{1}{\varepsilon} \text{ jours sidéraux , et non } \frac{1}{E} \text{ jours sidéraux.}$$

Appelons ν' la vitesse eulérienne modifiée par l'élasticité de la Terre ; le vecteur $\overline{\nu'}$ est dirigé toujours suivant OC. En écrivant, comme dans l'Introduction, que le point G_0 (situé sur OG à la distance 1 de O) reste fixe dans l'espace, bien que participant aux deux rotations $\overline{o}$ autour de OI, $\overline{\nu'}$ autour de OC, nous obtenons encore

$$\nu' = \frac{\sin i}{\sin \theta} o, \quad (**)$$

(*) Ce pôle est instantané, car il varie de position, à la surface de la Terre, à chaque instant, en restant sur la droite CI et en divisant la distance CI dans un rapport constant.

(**) Cette formule pourrait déjà servir de démonstration au théorème que nous venons d'énoncer, si l'on observe que, d'après la conclusion du § 2,

ou

$$\nu' = \frac{\sin(i + \theta - \theta)}{\sin\theta}\, o = \cos(i + \theta)\,[\operatorname{tg}(i + \theta)\operatorname{cotg}\theta - 1]\, o \qquad (15).$$

La valeur de $\operatorname{tg}(i + \theta)\operatorname{cotg}\theta$ sera apparemment modifiée. Au lieu d'être, comme plus haut, $\frac{C}{A} = 1 + \varepsilon$, C et A représentant les moments d'inertie principaux de l'ellipsoïde I de révolution autour de OC (et d'ellipticité ε), elle devient $\frac{C_1}{A_1}$, C_1 et A_1 représentant les moments d'inertie de l'ellipsoïde II de révolution autour de OC′ (et d'ellipticité $E = \varepsilon + \varepsilon'$) par rapport aux droites OC et OA (*) : on le voit en appliquant la méthode de l'Introduction. Or ces derniers moments sont liés aux moments d'inertie *principaux* C', A' de l'ellipsoïde II par les relations

$$\left\{\begin{aligned} C_1 &= C'\cos^2\vartheta_1 + A'\sin^2\vartheta_1 = C' - (C' - A')\sin^2\vartheta_1, \\ A_1 &= C'\sin^2\vartheta_1 + A'\cos^2\vartheta_1 = A' + (C' - A')\sin^2\vartheta_1, \end{aligned}\right\}$$

en sorte que

$$\operatorname{tg}(i + \theta)\operatorname{cotg}\theta - 1 = \frac{C_1 - A_1}{A_1} = \frac{C' - A'}{A'}\,\frac{1 - 2\sin^2\vartheta_1}{1 + \dfrac{C' - A'}{A'}\sin^2\vartheta_1}$$

$$= E\,\frac{1 - 2\sin^2\vartheta_1}{1 + E\sin^2\vartheta_1}, \text{ puisque } \frac{C' - A'}{A'} = E.$$

Posons $\operatorname{tg}(i + \theta)\operatorname{cotg}\theta - 1 = \varepsilon_0$, ε_0 étant une *ellipticité fictive*. Alors l'élasticité de la Terre a pour effet de transformer la relation

$$\nu = \cos(i + \theta)\,.\,\varepsilon\,.\,o,$$

---

l'élasticité de la Terre n'influe pas sur les angles i et θ, et que par conséquent $\nu' = \nu$, $T' = T$. Mais il est intéressant d'examiner les choses d'un peu plus près.

(*) On pourrait déjà voir qu'aux termes du second ordre près l'on a

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{C}{A}$$

et par conséquent

$$\nu' = \nu, \qquad T' = T.$$

en

$$\nu' = \cos(i + \theta) \cdot \varepsilon_0 \cdot o,$$

ε_0 étant une ellipticité fictive *inférieure à l'ellipticité réelle* E de l'ellipsoïde élastique II; en effet

$$\frac{1 - 2\sin^2 \vartheta_1}{1 + E\sin^2 \vartheta_1} < 1.$$

Cela se voit encore plus clairement, si l'on remarque que le rapport $\frac{C_1}{A_1}$ qui intervient dans l'expression de ν' désigne celui de deux moments d'inertie de II par rapport à deux axes rectangulaires qui ne sont plus les axes principaux de II, mais bien des axes légèrement inclinés (de ϑ_1) sur ces derniers (fig. 4) : ce rapport doit être évidemment inférieur à celui $\frac{C'}{A'}$ des moments principaux de l'ellipsoïde aplati II.

Cependant la formule

$$\varepsilon_0 = E\frac{1 - 2\sin^2 \vartheta_1}{1 + E\sin^2 \vartheta_1} \quad (16)$$

semble montrer que le rapport $\frac{\varepsilon_0}{E}$ dépend de ϑ_1 et, par conséquent, de $\lambda = i + \theta$ (puisque $\vartheta_1 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\lambda = \frac{\varepsilon'}{E}\lambda$). Il ne faut pas oublier que notre raisonnement est basé sur l'hypothèse que l'*on peut négliger les quantités du second ordre en* λ. Nous allons montrer directement que, *à ces quantités près*, le rapport $\frac{\varepsilon_0}{E}$ ne dépend pas de la donnée expérimentale λ. En effet, nous pouvons écrire

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tg}(i + \theta)\operatorname{cotg}\theta - 1 = \frac{i + \theta}{\theta} - 1 = \frac{i}{\theta},$$

et il s'agit de déterminer le rapport $\frac{i}{\theta}$.

Désignons par θ' l'angle GOC' (fig. 4) que fait la nouvelle position OC' de l'axe de figure avec l'axe fixe OG du couple des quantités de mouvement : alors

$$\theta = \theta' + \vartheta_1$$

et par conséquent

$$\frac{i}{\theta} = \frac{i}{\theta' + \vartheta_1} = \frac{i}{\theta'} \frac{1}{1 + \frac{\vartheta_1}{\theta'}}.$$

Or

$$\vartheta_1 = \frac{\varepsilon'}{E} \lambda = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (i + \theta) = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (i + \theta' + \vartheta_1),$$

d'où

$$\vartheta_1 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (i + \theta'), \quad \text{et} \quad \frac{\vartheta_1}{\theta'} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(\frac{i}{\theta'} + 1 \right).$$

Donc

$$\varepsilon_0 = \frac{i}{\theta} = \frac{i}{\theta'} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(\frac{i}{\theta'} + 1 \right)} = \frac{i}{\theta'} \frac{\varepsilon}{E + \varepsilon' \frac{i}{\theta'}} \quad (17).$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer le rapport

$$\varepsilon'_0 = \frac{i}{\theta'}.$$

En exprimant encore, comme nous l'avons fait dans l'Introduction, que la projection du moment résultant $\overline{OG_1}$ des quantités de mouvement sur la perpendiculaire OH à OG est nulle et en décomposant à cette fin ce moment résultant suivant les axes principaux OC′, OA′ de l'ellipsoïde II, nous obtenons

$$\operatorname{tg} (i + \theta') \operatorname{cotg} \theta' = \frac{C'}{A'} = 1 + E,$$

ou bien

$$\varepsilon'_0 = \frac{i}{\theta'} = \frac{i + \theta'}{\theta'} - 1 = \operatorname{tg} (i + \theta') \operatorname{cotg} \theta' - 1 = \frac{C' - A'}{A'} = E \quad (18).$$

En introduisant cette valeur dans (17), nous avons enfin

$$\varepsilon_0 = \frac{i}{\theta} = \frac{i}{\theta'} \frac{\varepsilon}{E + \varepsilon' \frac{i}{\theta'}} = E \frac{\varepsilon}{E + \varepsilon' E} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon'} = \varepsilon(1 - \varepsilon') = \varepsilon,$$

au terme en $\varepsilon\,\varepsilon'$ près; et $\frac{\varepsilon_0}{E} = \frac{\varepsilon}{E}$ est indépendant de λ.

D'où ce résultat important

$$\nu' = \cos(i + \theta) \,.\, \varepsilon \,.\, o :$$

la vitesse eulérienne est la même que si le globe cessait brusquement de tourner (*), car alors l'ellipticité actuelle $E = \varepsilon + \varepsilon'$ verrait sa partie ε' disparaître.

La période eulérienne est donc bien

$$T' = \frac{1}{\varepsilon} \text{ jours sidéraux,} \quad (19)$$

comme nous l'avons annoncé (**).

* * *

Considérons une molécule de la Terre; nous sommes tentés, d'après ce qui précède, de supposer qu'elle est soumise à trois espèces de forces : *forces attractives newtoniennes* provenant de toutes les autres molécules, *tensions élastiques* exercées sur elle par les molécules voisines, *force centrifuge* due à la rotation.

Mais nous ne devons pas nous imaginer que la Terre s'est trouvée un jour à l'état d'ellipsoïde élastique d'ellipticité ε et que, par suite de sa rotation, son ellipticité a augmenté de ε'.

Il est bien plus conforme à la réalité, ou du moins aux hypothèses géophysiques les plus probables, de supposer que la

---

(*) Ou, plus exactement, la vitesse eulérienne est égale à celle d'un second globe *rigide*, dont la forme serait celle que prendrait le premier si la rotation venait à cesser.

(**) Comme on le voit, l'augmentation ε' d'ellipticité due à l'élasticité du globe voit son effet sur la période eulérienne détruit par le déplacement (dû à la même cause) de l'axe de figure par rapport à OC.

Terre s'est trouvée un jour à l'état fluide incandescent, où ne devait pas exister de tension élastique : sous l'action combinée de l'attraction et de la force centrifuge, elle aurait pris la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati (Mac-Laurin), (dont nous nommons l'ellipticité ε_1), et elle se serait solidifiée sous cet état. Actuellement une molécule terrestre ne subirait donc pas de tension élastique.

Des forces élastiques n'apparaîtraient que si la vitesse de rotation du globe sur lui-même venait à changer, si par exemple elle devenait nulle : la force centrifuge ne ferait alors plus équilibre à l'action attractive et l'ellipsoïde de Mac-Laurin tendrait à prendre la forme sphérique, si en ce moment des tensions élastiques antagonistes n'apparaissaient s'efforçant de conserver à l'ellipsoïde son ellipticité ε_1 primitive : la lutte se produirait alors entre les forces attractives et ces tensions, et celles-ci finiraient par se faire équilibre sur un ellipsoïde de révolution aplati (*) dont l'ellipticité η serait intermédiaire entre ε_1 et 0.

Remarquons ici que, dans cette hypothèse, les forces élastiques sont *centrifuges*, en ce sens qu'elles tendent à augmenter, ou plutôt à maintenir une ellipticité, tandis que, dans les considérations précédentes, nous supposions qu'elles étaient *centripètes*, en ce sens qu'elles empêchaient la matière de fluer trop librement et de prendre une ellipticité trop forte. Mais il est facile de voir que les conclusions auxquelles nous sommes parvenus sont valides avec cette nouvelle manière d'envisager les choses, car ce qui est intervenu dans nos raisonnements et nos formules, ce sont seulement les *déformations*, et non pas les *forces* qui produisent ces déformations. En particulier, nous pouvons encore dire que *la période eulérienne* (*du mouvement du pôle de rotation* I *autour du point* C *fixe à la surface du globe*) *est celle qui se rapporterait au mouvement du même pôle à la surface du même globe, si l'on supposait que la rotation de ce dernier cessât brusquement.*

(*) Ceci est encore un théorème que nous supposons admis.

Autrement dit, *l'ellipticité* η *en question n'est autre que l'ellipticité désignée ci-dessus par* ε.

Appelons ε' la différence

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 - \eta = \varepsilon_1 - \varepsilon \quad (20) :$$

c'est la quantité dont diminue l'ellipticité ε_1 quand la rotation o cesse brusquement. Cette définition revient à celle que nous avons donnée plus haut.

Nous allons montrer que *cette diminution* ε' *d'ellipticité est égale à l'ellipticité* ε_3 *que prendrait une sphère sous l'action centrifuge de la rotation, et centripète de l'attraction et de l'élasticité.*

Quand la rotation o a lieu, les forces qui agissent sur une molécule du globe (ellipsoïde I d'ellipticité ε_1) sont

$$\text{État 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{la force centrifuge } \overline{F}' \text{ de la rotation,} \\ \text{la force centripète } \overline{R}', \text{ résultante des forces attractives.} \end{array} \right.$$

Après cessation de rotation, la force $\overline{F}'$ est devenue nulle; les deux actions en présence qui vont se faire équilibre sur un autre ellipsoïde II (d'ellipticité ε, $\varepsilon < \varepsilon_1$) sont

$$\text{État 2} \left\{ \begin{array}{l} \text{la force centrifuge } \overline{E}', \text{ résultante des forces élastiques (*),} \\ \text{la force centripète } \overline{R}'' \ (R'' < R'), \text{ résultante des forces attractives.} \end{array} \right.$$

Donc, pour diminuer l'ellipticité de ε', nous devons appliquer à chaque molécule supposée dans l'état 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la force centripète } -\overline{F}', \\ \text{la force centrifuge } -(\overline{R}' - \overline{R}''), \\ \text{la force centrifuge } \overline{E}'. \end{array} \right.$$

(*) Ces forces proviennent du changement de la figure d'équilibre qui veut se produire par suite de la disparition des forces F'.

Il faut aussi remarquer que les désignations I, II des ellipsoïdes sont précisément les inverses de celles adoptées précédemment.

Or il est facile de concevoir que la *diminution* ε' d'ellipticité due à l'adjonction des forces $-\overline{F}'$, $-(\overline{R}' - \overline{R}'')$, $\overline{E}'$ est égale à l'*augmentation* d'ellipticité que subirait l'ellipsoïde II (d'ellipticité ε) si l'on ajoutait à chacune de ses molécules les forces respectives

$$\left\{\begin{array}{l} \text{centrifuge } + \overline{F}', \\ \text{centripète } \overline{R}' - \overline{R}'', \\ \text{centripète } - \overline{E}', \end{array}\right.$$

c'est-à-dire à l'augmentation ε'' d'ellipticité que subirait cet ellipsoïde II sous l'action combinée de

$$\left\{\begin{array}{l} \text{la rotation (effort centrifuge } \overline{F}'), \\ \text{l'attraction différentielle (effort centripète } \overline{R}' - \overline{R}''), \text{ et de} \\ \text{l'élasticité (effort centripète } - \overline{E}'), \end{array}\right.$$

Supposons maintenant le globe à l'état *sphérique* à l'instant originaire [c'est, d'après Liapounoff, la forme d'équilibre qu'une masse (dont toutes les molécules s'attirent suivant la loi newtonienne) prend lorsque sa rotation est nulle (*)]. Sur une de ses molécules agit seulement

$$\text{État 3} \left\{ \text{la force attractive } R''' \ (R''' < R' < R). \right\}$$

Si on l'anime de la rotation ω, il tend à s'aplatir, parce que la force centrifuge F^{IV} qui se produit est supposée dépasser l'action combinée de la force attractive R''' et de la résistance élastique E''' centripète(*). L'ellipticité qu'il prend est nommée ε_3. Il est actuellement à l'état suivant :

$$\text{État 4} \left\{\begin{array}{l} \text{force centrifuge } \overline{F}^{IV} \text{ de la rotation,} \\ \text{force centripète } \overline{R}^{IV}, \text{ résultante des forces attractives } (R^{IV} > R'''), \\ \text{force centripète } \overline{F}^{IV}, \text{ résultante des forces élastiques.} \end{array}\right.$$

(*) On peut supposer que les propriétés élastiques de la sphère n'apparaissent que postérieurement à sa formation.

Pour passer de l'état 3 à l'état 4, nous devons appliquer à chacune de ses molécules

$$\left\{\begin{array}{l}\text{la force centrifuge } \overline{\overline{F}}^{iv},\\ \text{la force centripète } \overline{R}^{iv} - \overline{R}''',\\ \text{la force centripète } \overline{\overline{E}}^{iv}.\end{array}\right\}$$

Ainsi, pour donner à la sphère primitive l'ellipticité ε_3, nous devons appliquer à chacune de ses molécules les forces de :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{la rotation (effort centrifuge } \overline{\overline{F}}^{iv}),\\ \text{l'attraction différentielle (effort centripète } \overline{R}^{iv} - \overline{R}'''),\\ \text{l'élasticité (effort centripète } \overline{E}^{iv}).\end{array}\right\}$$

D'après le principe de la superposition des petites déformations (*), nous pouvons supposer que, d'une manière approchée,

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{F}' = \overline{F}^{iv},\\ \overline{R}' = \overline{R}^{iv},\\ \overline{R}'' = \overline{R}''',\\ -\overline{E}' = \overline{E}^{iv}.\end{array}\right\}$$

Par suite, les forces qui doivent agir sur l'ellipsoïde II pour augmenter son ellipticité ε de $\varepsilon'' = \varepsilon'$ sont bien celles qui doivent agir sur la sphère pour lui communiquer l'ellipticité ε_3.

En d'autres termes, ces deux quantités, $\varepsilon' = \varepsilon''$ et ε_3, sont égales (**), et notre théorème se trouve démontré.

* * *

Tout revient donc à calculer l'ellipticité ε_3 que prendrait une

---

(*) C'est-à-dire de l'indépendance de la grandeur et de l'effet des forces vis-à-vis des déformations précédemment acquises.

(**) Toujours d'après le principe de la superposition des petites déformations.

sphère sous l'action combinée de l'attraction de ses molécules entre elles, de la force centrifuge due à la rotation o et de la résistance élastique qu'elle présente à l'action combinée des deux premières forces.

Nous allons calculer séparément, dans le paragraphe suivant (*) :

1° l'ellipticité ε_1 que prendrait la sphère sous l'action combinée de la force centrifuge et de l'attraction, si l'on supposait qu'elle n'offrît aucune résistance élastique;

2° l'ellipticité ε_2 qu'elle prendrait sous l'action combinée de la force centrifuge et de l'élasticité, si l'on supposait que ses molécules ne s'attirassent pas; puis nous montrerons, avec W. Thomson (**), que l'ellipticité cherchée ε_3 est reliée aux deux ellipticités fictives ε_1, ε_2, par la relation

$$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \qquad (21)$$

On voit, aussi bien par (21) que par les conditions du problème, que

$$\varepsilon_3 < \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 < \varepsilon_2,$$

puisque les forces résistant à l'action centrifuge de la rotation sont plus considérables, dans le problème actuel que dans le 1° et le 2°.

Nous concluons déjà que

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

et puis, d'après (20) :

$$\varepsilon_1 - \eta = \varepsilon_1 - \varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

(*) Il est clair que, dans ces deux problèmes, nous admettrons que les formes d'équilibre sont encore deux ellipsoïdes de révolution aplatis.

(**) *Treatise on natural Philosophy*, 1883, t. II, art 840.

Voyez aussi SOMMERFELD, *op. et lib. cit.*, p. 697.

d'où

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (22)$$

Connaissant les valeurs numériques de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, nous obtiendrons celle de ε par (22), et ensuite la valeur de la *période eulérienne modifiée* $T' = \frac{1}{\varepsilon}$ jours. Nous verrons qu'*on peut expliquer la différence qui existe entre la période chandlérienne (eulérienne modifiée) et la période eulérienne au moyen de l'élasticité du globe ;* et qu'*il suffit, pour cela, de supposer que la Terre possède seulement une élasticité comparable à celle de l'acier* (*).

§ 4. — *Calcul de* ε_1 *et* ε_2. *Théorème de W. Thomson et conclusion.*

Premier problème. — Nous considérons le globe comme une masse sphérique fluide homogène, incompressible, n'offrant aucune résistance élastique à la déformation : ses molécules s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances. De plus nous supposons que ce globe est animé de la rotation o autour d'un de ces axes, ce qui lui donne la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati (**). Il s'agit de déterminer l'ellipticité ε_1 qui résulte de cette rotation.

Nous pourrions, à vrai dire, nous passer de démonstration en renvoyant à la valeur bien connue, donnée par Clairaut :

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{4}\frac{o^2R^3}{fM} = \frac{5}{4}\frac{o^2R}{\frac{fM}{R^2}} = \frac{5}{4}\frac{o^2R}{g},$$

où R désigne le rayon de la sphère, M sa masse, f le coefficient

(*) Voyez Newcomb, Hough, Larmor, Sommerfeld, *op. cit.*

(**) Ellipsoïde de Mac-Laurin. Comme on le sait, pour la Terre il ne peut être question d'un ellipsoïde *à trois axes inégaux* de Jacobi.

(Voyez O. Meyer, *Journal de Crelle*, t. XXIV ; et surtout Kostka, *Monatsberichte der K. Ak. d. Wiss.*, Berlin, février 1870 ; H. Buchholz, *Das mechanische Potential...*, t. I, Leipzig, 1908, p. 326.)

d'attraction et g l'accélération gravitique à la surface. Mais nous préférons, pour ce qui suit, opérer de la façon suivante.

Après que la rotation a déformé la sphère, la masse a pris la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati.

Pour établir la valeur approchée du potentiel attractif de cet ellipsoïde, qui va nous servir à l'instant, nous pourrions nous servir du développement bien connu de Laplace. Mais nous établirons cette expression directement en remarquant, avec Sommerfeld, que le potentiel de l'attraction de cet ellipsoïde est égal, aux quantités du troisième ordre près, à celui de l'ensemble formé par la sphère de rayon R et par un *bourrelet* (de masse m et de rayon moyen R) choisi de telle façon que les moments d'inertie polaire et équatorial de cet ensemble soient égaux à ceux C, A de l'ellipsoïde de révolution.

Supposons le bourrelet concentré sur la circonférence de rayon R située dans le plan équatorial : l'unité de longueur de cette circonférence porte alors une masse qui est la *densité linéaire :*

$$\sigma = \frac{m}{2\pi R}.$$

Le moment d'inertie de cette circonférence matérielle par rapport à l'axe polaire, perpendiculaire à son plan, est

$$I_{OC} = \int_0^{2\pi R} \frac{m}{2\pi R} R^2 ds = mR^2,$$

tandis que par rapport à une droite OA de son plan :

$$I_{OA} = \frac{1}{2} I_{OC} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Comme le moment d'inertie de la sphère est pour tous ses axes

$$I = \frac{2\pi}{5} MR^2,$$

nous devons avoir

$$\left\{\begin{array}{l} I + I_{OC} = \dfrac{2\pi}{5} MR^2 + mR^2 = C, \\ I + I_{OA} = \dfrac{2\pi}{5} MR^2 + \dfrac{1}{2} mR^2 = A, \end{array}\right.$$

d'où, en soustrayant la seconde condition de la première,

$$\frac{1}{2} mR^2 = C - A,$$

puis

$$m = \frac{2(C-A)}{R^2} = \frac{2A}{R^2}\,\frac{C-A}{A} = \frac{2A}{R^2}\,\varepsilon_1,$$

ou, en introduisant la valeur approchée,

$$A = \frac{2\pi}{5} MR^2,$$

$$m = \frac{4}{5} M\varepsilon_1. \quad (1)$$

Désignons par $P(x, y, z)$ le point potentié *extérieur* à la masse; soit r sa distance au centre O de l'ellipsoïde. Prenons OC pour axe Oz et deux axes rectangulaires situés dans le plan équatorial pour axes Ox, Oy; supposons de plus que le plan zOx passe par P. Si ϑ désigne l'angle xOP, nous aurons

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = 0, \qquad z = r\sin\vartheta.$$

Soient $M(x', y', z')$ un point de la circonférence où est condensé le bourrelet, $d\mu$ l'élément de masse qui y est situé, R sa distance au centre O, φ l'angle xOM. Le potentiel de la circonférence matérielle au point P est évidemment

$$v = f\sum \frac{d\mu}{MP}$$

L'élément de masse est aussi

$$d\mu = \sigma ds = \frac{m}{2\pi R} R d\varphi = \frac{m d\varphi}{2\pi}.$$

La distance $\overline{MP}$ est égale à

$$\sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OM}^2 - 2\overline{OM} \cdot \overline{OP} \cdot \cos(OM, OP)}$$
$$= \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cdot \left(\frac{x}{r}\frac{x'}{R} + \frac{y}{r}\frac{y'}{R} + \frac{z}{r}\frac{z'}{R}\right)}$$
$$= r\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) \cdot K},$$

en désignant par K le cosinus

$$\frac{xx' + yy' + zz'}{rR}$$

de l'angle POM.

Le potentiel du bourrelet en P sera donc

$$v = f\int_0^{2\pi} \frac{m d\varphi}{2\pi} \frac{1}{r\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2K\left(\frac{R}{r}\right)}}$$
$$= \frac{fm}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2K\left(\frac{R}{r}\right)}} \quad (2)$$

En développant la racine carrée suivant les puissances croissantes de $\frac{R}{r}$, nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2K\left(\frac{R}{r}\right)}} = 1 + \frac{R}{r}K + \left(\frac{R}{r}\right)^2\left[\frac{3}{2}K^2 - \frac{1}{2}\right] + \cdots,$$

puis en multipliant par $d\varphi$ et en intégrant de 0 à 2π,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2K\left(\frac{R}{r}\right)}} = 2\pi + \frac{R}{r}\int_0^{2\pi} K d\varphi + \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \int_0^{2\pi} K^2 d\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 2\pi + \cdots.$$

Or le triangle sphérique rectangle découpé par le trièdre $OxPM$ sur la sphère de rayon 1 nous donne

$$K = \cos POM = \cos XOP \,.\, \cos XOM = \cos\vartheta \,.\, \cos\varphi.$$

Donc

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} K d\varphi = \cos\vartheta \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} K^2 d\varphi = \cos^2\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \cos^2\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \pi\cos^2\vartheta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Le développement précédent devient

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2K\left(\frac{R}{r}\right)}} = 2\pi\left[1 + \left(\frac{3}{4}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \cdots\right],$$

et, en l'introduisant dans l'expression (2) de v, nous obtenons pour le potentiel en P du bourrelet :

$$v = \frac{fm}{r}\left[1 + \left(\frac{3}{4}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{fm}{r}\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right) + \cdots\right]. \quad (3)$$

Le potentiel de l'ensemble formé par la sphère et le bourrelet,

qui est égal, aux quantités du troisième ordre près, à celui de l'ellipsoïde de révolution, sera donc, moyennant (1) :

$$V = \frac{fM}{r} + v = \frac{fM}{r} + \frac{f}{r}\frac{4}{5} M \varepsilon_1 \left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) + \cdots \right]$$

$$= fM \left[\frac{1}{r} + \frac{4}{5}\frac{\varepsilon_1}{r} + \frac{3}{5}\frac{R^2}{r^3} \varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) + \cdots \right] \quad (4)$$

Telle est la valeur du potentiel développé en fonction des puissances de $\frac{R}{r}$: les coefficients du développement forment ce qu'on appelle les *fonctions sphériques* (*).

Si nous supposons que le point potentié *extérieur à la masse* se rapproche de plus en plus de la surface de l'ellipsoïde de révolution qui limite cette masse, r tendra vers le rayon vecteur r' de sphéroïde d'ellipticité ε_1 (**)

$$r' = R \left[1 + \varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) \right]$$

le rayon moyen étant pris égal au rayon de la sphère.

Sur la surface, le rayon vecteur étant la distance r, nous aurons, en remarquant que l'on peut écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} = \frac{1}{R}\left[1 - \varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) \right], \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 - 3\varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) \right],$$

la valeur suivante pour le potentiel :

$$V = \frac{fM}{R}\left[1 - \varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5}\varepsilon_1 \left\{ 1 - \varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) \left\{ 1 - 3\varepsilon_1 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) \right\} + \cdots \right]$$

$$= \frac{fM}{R}\left[1 + \frac{4}{5}\varepsilon_1 - \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right)\left(\varepsilon_1 - \frac{3}{5}\varepsilon_1\right) + \cdots \right]$$

$$= \frac{fM}{R}\left[1 + \frac{4}{5}\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1}{5}\left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3}\right) \right]; \quad (5)$$

en négligeant toujours les termes du second ordre en ε_1.

(*) Voyez les traités classiques, par exemple F. Tisserand, *Mécanique céleste*, t. II, 1891, chap. XVI et suivants.

(**) Voyez l'équation (5) du paragraphe 2 de cette Deuxième partie.

Ayant déterminé le potentiel V de l'attraction en un point de la surface du sphéroïde, passons au calcul du potentiel U au même point de la force centrifuge due à la rotation o autour de OC. Ce potentiel s'obtient immédiatement, car

$$U = \frac{1}{2} o^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} o^2 r^2 \cos^2 \vartheta ;$$

de plus on peut remplacer, dans son expression, r par le rayon moyen R du sphéroïde (*) : donc

$$U = \frac{1}{2} o^2 R^2 \cos^2 \vartheta = \frac{1}{3} o^2 R^2 + \frac{1}{2} o^2 R^2 \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3} \right), \quad (6)$$

en faisant apparaître la fonction sphérique $cos\ ^2\vartheta - \frac{2}{3}$.

Pour que la surface de l'ellipsoïde soit une surface d'équilibre, il est nécessaire que le *potentiel total*, somme du potentiel V de l'attraction et de celui U de la force centrifuge, soit *constant* en tous les points de la surface ; c'est-à-dire constant en tous les points d'un méridien (condition suffisante), puisque l'ellipsoïde est de révolution. Il faut donc que V + U soit indépendant de la latitude ϑ du point considéré. Or

$$V + U = \frac{fM}{R} \left(1 + \frac{4}{5} \varepsilon_1 \right) + \frac{1}{3} o^2 R^2 + \left(\frac{1}{2} o^2 R^2 - \frac{2}{5} fM \frac{\varepsilon_1}{R} \right) \left(\cos^2 \vartheta - \frac{2}{3} \right) .$$

Pour que cette somme soit indépendante de ϑ, il faut que le coefficient de $cos^2\vartheta - \frac{2}{3}$ soit nul, c'est-à-dire que

$$\frac{2}{5} fM \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{1}{2} o^2 R^2 \qquad (7),$$

(*) Car, o étant très petit, on peut négliger le terme en $o^2 \varepsilon_1$.

d'où nous tirons

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{4}\frac{o^2R^3}{fM} = \frac{5}{4}\frac{o^2R}{g} \qquad (8),$$

ce qui est bien la valeur indiquée par Clairaut.

Nous pouvons encore, avec Sommerfeld, écrire l'équation de condition (7) sous la forme

$$-V_2' = \varepsilon_1 V_2 = U_2 \qquad (9),$$

en désignant par U_2 et $V_2' = -\varepsilon_1 V_2$ les deux termes des développements de U et V qui contiennent la fonction sphérique du second ordre $cos^2\vartheta - \frac{2}{3}$; V_2 et U_2 ont les valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_2 = \frac{2}{5}\frac{fM}{R}\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right), & (10) \\ U_2 = \frac{1}{2}o^2R^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right). & (11) \end{array} \right.$$

Remarquons que ε_1 n'intervient pas dans U_2, parce que nous avons remplacé, dans la valeur de U,

$$U = \frac{1}{2}o^2r^2\cos^2\vartheta,$$

r par R, sachant que ce potentiel est faible à cause de la petitesse de *o* : en sorte que l'ellipticité intervient seulement dans le potentiel dû à l'attraction.

Passons maintenant à la détermination numérique de ε_1 pour la Terre.

Nous prenons pour unités le *mètre* et la *seconde*; alors

$$o = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60} = \frac{2\pi}{86400} \text{ par seconde,}$$

$$R = \frac{4\times 10^4\times 10^3}{2\pi} = \frac{2}{\pi}10^7 \text{ mètres, } g = 9{,}81^{m}/sec^2.$$

Donc

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \times \frac{2}{\pi} \times 10^7 \times \frac{1}{9{,}81} = \frac{1}{289},$$

puis

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{4}\frac{1}{289} = \frac{1}{231}.$$

D'après cela, si le globe avait été primitivement à l'état fluide incandescent et s'était solidifié sous cet état, et si cette solidification s'était faite *d'une manière parfaite*, en ce sens que la Terre serait aujourd'hui *absolument rigide et aucunement élastique*, la période eulérienne serait de

$$T = \frac{1}{\varepsilon_1} \text{ jours} = 231 \text{ jours (*)}.$$

Ce résultat est surprenant au premier abord, car la théorie eulérienne nous apprend que cette période devrait être de 305 jours. Mais il ne faut pas oublier que le rapport $\varepsilon = \frac{C-A}{A} = \frac{1}{305}$ intervenant dans cette théorie a été déterminé par les observations de la précession luni-solaire. Le désaccord qui existe ici est donc celui qui se produit entre la théorie de Mac Laurin et l'observation de la précession. Il peut être mis sur le compte de l'*hétérogénéité* de la Terre, car la théorie de Mac Laurin suppose que la Terre est homogène, ce qui est manifestement inexact (**).

Cependant, par approximation, nous continuerons à regarder le globe comme *homogène*. Les résultats que nous obtiendrons seront peut-être douteux au point de vue numérique, mais ils devront cependant être regardés comme *qualitativement vrais*.

(*) Voyez H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1895, chap. XII et autres traités, et pour la bibliographie A. E. H. Love, *Encyclopädie der math. Wiss.*, t. IV, 1901, art. 16, n° 4, pp. 125 et suiv.

(**) Comparez ce que nous avons dit au paragraphe 1 de cette Deuxième partie.

La seule exception que nous ferons à cette règle est de partir de la valeur

$$T = \frac{1}{\varepsilon_1} \text{ jours} = 305 \text{ jours},$$

ε_1 étant déterminé par l'observation de la précession (au lieu de l'être par l'hypothèse précédente de l'homogénéité), et de voir comment cette valeur peut être portée à la valeur

$$T' = 427 \text{ jours}$$

que lui assignent les observations *directes* de Chandler.

Second problème. — Nous supposons à présent que le globe se compose d'une masse élastique, homogène et isotrope, incompressible, de densité ρ, dont les molécules ne s'attirent plus, que ce globe primitivement sphérique est animé d'une rotation uniforme o et que l'effet de cette rotation est de transformer la sphère en un ellipsoïde de révolution aplati ayant ε_2 pour ellipticité. Le problème consiste à déterminer cette ellipticité ε_2.

L'élasticité de la matière est déterminée par le fait qu'on suppose cette dernière *incompressible* et qu'on se donne son module d'élasticité E $^{kg}/_{cm^2}$: alors on aura, si θ désigne le coefficient de compression cubique,

$$\theta = 0;$$

la constante μ de Lamé sera prise égale à $\frac{E}{3}$ (*).

Thomson et Hough ont traité cette question, mais Sommerfeld a beaucoup simplifié leurs solutions : aussi c'est sa méthode que nous suivrons dans les développements suivants.

Prenons encore l'axe de rotation pour Oz et deux axes rectan-

---

(*) Voyez Thomson et Tait, *Treatise on natural Philosophy*, t. II, 1883, art. 837. Cette constante est souvent appelée *rigidité* (rigidity) par les auteurs anglais et *coefficient de frottement* (Reibungskoeffizient) par les auteurs allemands.

gulaires (tournant avec la vitesse o autour de Oz), situés dans le plan équatorial, pour axes Ox, Oy.

Désignons par x, y, z les coordonnées d'une molécule M et par $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ les composantes suivant Ox, Oy, Oz du déplacement de M. Si l'on exprime que chacune des molécules M est en équilibre sous l'action de la force $F\rho d\tau$ agissant sur sa masse $\rho d\tau$ (F étant une force rapportée à l'unité de masse) et de la force $Td\sigma$ agissant sur sa surface $d\sigma$ (T étant une force rapportée à l'unité de surface), on obtient six équations : les trois équations de moments montrent que les neuf tensions X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3 (intervenant dans les expressions des composantes T_x, T_y, T_z de l'effort superficiel) se ramènent à six distinctes seulement

$$\left\{\begin{array}{ll} X_1 = N_1, & Y_3 = Z_2 = T_1, \\ Y_2 = N_2, & Z_1 = X_3 = T_2, \\ Z_3 = N_3, & X_2 = Y_1 = T_3, \end{array}\right\} \quad (1)$$

N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 étant les six éléments de Lamé (*), tandis que, moyennant cette observation, les équations de forces s'écrivent de la façon suivante (**) :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho X = \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z}, \\ \rho Y = \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z}, \\ \rho Z = \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z}, \end{array}\right\} \quad (2)$$

où X, Y, Z désignent les composantes de F.

(*) Voyez Lamé, *Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1852

(**) Voyez par exemple P. Appell, *Traité de Méc. rationnelle*, t. III, chap. XXX, n° 615, ou bien E. Mathieu, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1890, 1re partie, nos 4-5.

$X_1 = N_1$, $Y_1 = T_3$, $Z_1 = T_2$ sont les composantes de l'effort qui s'exerce sur la face négative de $d\sigma_1$, rapporté à l'unité de surface, etc., $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ désignant les faces parallèles à $y0z$, $z0x$, $x0y$ du tétraèdre élémentaire de masse $\rho\, d\tau$.

Ces composantes ont pour expressions (*) :

$$\left\{\begin{array}{l} N_1 = -p - 2\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} = -p - \dfrac{2}{3} E \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ N_2 = -p - 2\mu \dfrac{\partial v}{\partial y} = -p - \dfrac{2}{3} E \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ N_3 = -p - 2\mu \dfrac{\partial w}{\partial z} = -p - \dfrac{2}{3} E \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ T_1 = -\mu \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = -\dfrac{E}{3}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ T_2 = -\mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = -\dfrac{E}{3}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ T_3 = -\mu \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{E}{3}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \end{array}\right. \qquad (3)$$

p désignant la pression hydrostatique qui règne à l'intérieur du sphéroïde.

En introduisant ces valeurs dans les équations (2) et en remarquant que les seuls forces X, Y, Z qui interviennent sont les composantes $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U_2}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U_2}{\partial z}$ de la force centrifuge (qui doivent être introduites pour l'équilibre relatif vis-à-vis des axes tournants $Oxyz$), nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{E}{3}\left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho \dfrac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

(*) Voyez, par exemple, S. S. Hough. *On the Rotation of an elastic Spheroid* (Phil. trans., 1896, partie A, p. 122), ou A. E. H. Love, *Encyclopädie der math. Wissenschaften*, t. IV, 1901, art. 15, n° 12, p. 69.

ou, puisque la matière est supposée incompressible,

$$\theta = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0, \qquad (4)$$

la forme condensée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{E}}{3}\Delta \mathbf{u} + \dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho \dfrac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{E}}{3}\Delta \mathbf{v} + \dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho \dfrac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{E}}{3}\Delta \mathbf{w} + \dfrac{\partial p}{\partial z} + \rho \dfrac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial z} = 0, \end{array} \right\} \qquad (5)$$

le signe Δ désignant l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Telles sont les équations différentielles qu'il s'agit d'intégrer. Elles feront connaître par leur résolution

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \varphi_1(x, y, z), \\ \mathbf{v} = \varphi_2(x, y, z), \\ \mathbf{w} = \varphi_3(x, y, z), \end{array} \right\}$$

ce qui nous permettra de déterminer l'ellipticité ε_2.

Mais il faut remarquer que le système (4), (5) du second ordre en $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ doit être complété par les équations de condition à la surface du sphéroïde *(conditions aux limites)*. Ces équations expriment que *cette surface est d'équilibre ;* pour cela les composantes T_x, T_y, T_z (de l'effort qui s'exerce sur un de ses éléments) doivent être nulles.

Or les expressions de ces tensions sont, comme on sait (*),

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}_x = \mathrm{N}_1 \cos(n, x) + \mathrm{T}_3 \cos(n, y) + \mathrm{T}_2 \cos(n, z), \\ \mathrm{T}_y = \mathrm{T}_3 \cos(n, x) + \mathrm{N}_2 \cos(n, y) + \mathrm{T}_1 \cos(n, z), \\ \mathrm{T}_z = \mathrm{T}_2 \cos(n, x) + \mathrm{T}_1 \cos(n, y) + \mathrm{N}_3 \cos(n, z). \end{array} \right\}$$

(*) Voyez, par exemple, APPELL, *op. et lib. cit.*, n° 802, p. 514. n désigne la normale positive à l'élément de surface.

Donc les équations de condition seront, en introduisant les valeurs (5) des six tensions,

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\mathrm{E}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + p\right)\cos(n,x) \\ + \frac{\mathrm{E}}{3}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)\cos(n,y) + \frac{\mathrm{E}}{3}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\right)\cos(n,z) = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \quad (6)$$

Il s'agit maintenant de résoudre le système des sept équations (4), (5), (6).

Nous nous proposons, avec Sommerfeld (*), de satisfaire à ces équations par les solutions :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u} = a_1 \cdot \frac{\partial(r^2\mathrm{U}_2)}{\partial x} + a_2 \cdot r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x} + a_3\mathrm{R}^2 \cdot \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x}, \\ \mathbf{v} = a_1 \cdot \frac{\partial(r^2\mathrm{U}_2)}{\partial y} + a_2 \cdot r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial y} + a_3\mathrm{R}^2 \cdot \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial y}, \\ \mathbf{w} = a_1 \cdot \frac{\partial(r^2\mathrm{U}_2)}{\partial z} + a_2 \cdot r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial z} + a_3\mathrm{R}^2 \cdot \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial z}, \end{array}\right. \quad (7)$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes convenablement choisies, R le rayon moyen et U_2 la fonction sphérique du second ordre

$$\mathrm{U}_2 = \frac{1}{2}o^2r^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}o^2(x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (8)$$

Ainsi nous n'intégrons pas les équations différentielles du problème, mais nous nous bornons à *vérifier* la solution indiquée par le savant allemand (**). Cette vérification prouvera que cette

---

(*) *Op. et lib. cit.*, 1903, p. 694.

(**) Thomson et Hough (*op. cit.*) ont indiqué des solutions plus générales; mais nous nous bornons à exposer ici la méthode la plus simple et la plus directe. Pour ce qui concerne ce problème, voyez *Encyclopädie der math. Wissenschaften*, t. IV, art. 25, nos 3 et 4.

solution satisfait à ces équations et servira en même temps à déterminer les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3.

La condition d'incompressibilité nous donne

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

soit

$$a_1 \cdot \Delta(r^2 U_2) + a_2 \cdot \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(r^2 \frac{\partial U_2}{\partial x}\right) + a_3 R^2 \cdot \Delta U_2 = 0.$$

La fonction U_2 étant une fonction sphérique du second ordre (homogène du second degré), nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta U_2 = 0, \\ \Delta(r^2 U_2) = r^2 \cdot \Delta U_2 + U_2 \ \Delta r^2 + 2 \sum \dfrac{\partial r^2}{\partial x} \dfrac{\partial U_2}{\partial x} \\ = 6 U_2 + 4 \left(x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y} + z \dfrac{\partial}{\partial z}\right)[U_2] = 14 U_2, \\ \sum \dfrac{\partial}{\partial x}\left(r^2 \dfrac{\partial U_2}{\partial x}\right) = \sum \dfrac{\partial r^2}{\partial x} \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + \sum r^2 \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \\ = 2 \left(x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y} + z \dfrac{\partial}{\partial z}\right)[U_2] + r^2 \ \Delta U_2 = 4 U_2. \end{array}\right.$$

Par suite,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (14 a_1 + 4 a_2) U_2 = 0,$$

ce qui exige

$$14 a_1 + 4 a_2 = 0, \quad \text{soit} \quad a_2 = -\frac{7}{2} a_1. \quad (9)$$

Examinons à présent la première des équations différentielles (5).

Elle nous donne

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{E}{3} \Delta u.$$

Or

$$\Delta \mathbf{u} = a_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta (r^2 U_2) + a_2 \cdot \Delta \left(r^2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + a_3 R^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta U_2;$$

ou, comme

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta U_2 = 0, \qquad \Delta (r^2 U_2) = 14 U_2, \\ \Delta \left(r^2 \dfrac{\partial U_2}{\partial x} \right) = \Delta r^2 \cdot \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + r^2 \cdot \dfrac{\partial}{\partial x} \Delta U_2 + 2 \sum \dfrac{\partial r^2}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \\ = 6 \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + 4 \sum \left(x \dfrac{\partial}{\partial x} \right) \left[\dfrac{\partial U_2}{\partial x} \right] = 10 \dfrac{\partial U_2}{\partial x}, \end{array} \right\}$$

$$\Delta \mathbf{u} = 14 a_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} + 10 a_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} = -21 a_1 \frac{\partial U_2}{\partial x};$$

nous obtenons donc

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{E}{3} \left(-21 a_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} \right),$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial x} = (7 E a_1 - \rho) \dfrac{\partial U_2}{\partial x}, \text{ et de même} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = (7 E a_1 - \rho) \dfrac{\partial U_2}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = (7 E a_1 - \rho) \dfrac{\partial U_2}{\partial z}. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Ces équations nous donnent immédiatement

$$p = (7 E a_1 - \rho) U_2, \quad (11)$$

si nous faisons abstraction de la constante d'intégration.

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{3} E \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + p \right) x \\ + \dfrac{E}{3} \left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) y + \dfrac{E}{3} \left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) z = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array} \right\}$$

puisque l'on a pour la sphère

$$\frac{\cos(n,x)}{x} = \frac{\cos(n,y)}{y} = \frac{\cos(n,z)}{z}.$$

Ces conditions deviennent, par l'introduction de la valeur (11) de p,

$$\left\{\begin{array}{l} \left(x\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + y\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + z\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right) \\ + \left(x\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + y\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + z\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\right) = -\dfrac{3}{\mathrm{E}}(7\mathrm{E}a_1 - \rho)\mathrm{U}_2 x. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (12)$$

Or, d'après la solution (7) proposée,

$$\begin{aligned} x\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + z\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= a_1\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial(r^2\mathrm{U}_2)}{\partial x}\right] \\ &+ a_2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{r^2\partial \mathrm{U}_2}{\partial x}\right] \\ &+ a_3\mathrm{R}^2.\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x}\right]. \end{aligned}$$

Le coefficient de a_1, si l'on tient compte de l'identité

$$\frac{\partial(r^2\mathrm{U}_2)}{\partial x} = r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x} + 2x\mathrm{U}_2,$$

peut s'écrire

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x}\right] + 2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)[x\mathrm{U}_2]$$

En remarquant maintenant que $r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x}$, $x\mathrm{U}_2$, $\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x}$ sont des fonctions homogènes respectivement du 3^{me}, du 3^{me} et du 1er degré, on voit que ce coefficient et ceux de a_2, a_3 R^2 deviennent

$$3r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x} + 6x\mathrm{U}_2, \quad 3r^2\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x},$$

et l'on obtient

$$x\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+y\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}+z\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}=a_1\left(3r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+6xU_2\right)+a_2.3r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+a_3R^2.\frac{\partial U_2}{\partial x}. \quad (\alpha)$$

De même,

$$x\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+z\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}=a_1.\sum\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial(r^2U_2)}{\partial x}\right]$$

$$+a_2\left\{x\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)+y\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)+z\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)\right\}$$

$$+a_3R^2\sum\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}\right].$$

Les coefficients de a_1 et a_3R^2 sont les mêmes que les précédents. Quant à celui de a_2, il peut s'écrire:

$$\sum y\left(\frac{\partial^2U_2}{\partial x\partial y}r^2+2x\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=r^2.\sum\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}\right]$$

$$+2x.\sum\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)[U_2]$$

$$=r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+4xU_2,$$

et alors

$$x\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}+y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+z\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}=a_1\left(3r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+6xU_2\right)$$

$$+a_2\left(r^2\frac{\partial U_2}{\partial x}+4xU_2\right)+a_3R^2.\frac{\partial U_2}{\partial x}. \quad (\beta)$$

Si l'on tient compte de (α) et (β), la première équation (12) s'écrit:

$$(12a_1+4a_2)\,xU_2+(6a_1r^2+4a_2r^2+2a_3R^2)\frac{\partial U_2}{\partial x}=-5\left(7a_1-\frac{\rho}{E}\right)xU_2,$$

ou bien, en introduisant la valeur (9) de a_2,

$$\left\{\begin{array}{l}\left(19a_1-\dfrac{3\rho}{E}\right)xU_2+(2a_3R^2-8a_1r^2)\dfrac{\partial U_2}{\partial x}=0,\text{ et de même}\\ \left(19a_1-\dfrac{3\rho}{E}\right)yU_2+(2a_3R^2-8a_1r^2)\dfrac{\partial U_2}{\partial y}=0,\\ \left(19a_1-\dfrac{3\rho}{E}\right)zU_2+(2a_3R^2-8a_1r^2)\dfrac{\partial U_2}{\partial z}=0.\end{array}\right\}\quad(13)$$

Il est clair que les deux premières équations ne diffèrent pas, puisque x, y jouent le même rôle; cela se voit du reste immédiatement en introduisant la valeur (8) de U_2. Ces équations deviennent, après suppression du facteur $\frac{1}{6}o^2$,

$$\left\{\begin{array}{l}2(2a_3R^2-8a_1r^2)+\left(19a_1-\dfrac{3\rho}{E}\right)(x^2+y^2-2z^2)=0;\text{ et la troisième}\\ -4(2a_3R^2-8a_1r^2)+\left(19a_1-\dfrac{3\rho}{E}\right)(x^2+y^2-2z^2)=0.\end{array}\right\}(14)$$

Il ne faut pas perdre de vue que ces équations (14) sont les *équations à la surface :* elles doivent être satisfaites en tous les points de la surface sphérique $r=R$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de la latitude ϑ. Il faut donc que le coefficient de la fonction sphérique $x^2+y^2-2z^2$ et que le terme indépendant soient séparément nuls, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l}19a_1-\dfrac{3\rho}{E}=0,\\ 2a_3R^2-8a_1R^2=0;\end{array}\right\}$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}a_1=\dfrac{3}{19}\dfrac{\rho}{E},\qquad a_3=4a_1=\dfrac{12}{19}\dfrac{\rho}{E},\\ \text{et par (9)}\qquad a_2=-\dfrac{21}{58}\dfrac{\rho}{E}.\end{array}\right\}\quad(15)$$

Telles sont les valeurs que doivent avoir les constantes a_1, a_2, a_3. La vérification précédente prouve aussi, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que les solutions des équations différentielles sont données par (7).

En substituant les valeurs (15) dans les solutions (7), nous obtenons :

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{3}{19}\frac{\rho}{E}\left\{\frac{\partial(r^2U_2)}{\partial x} - \frac{7}{2}\cdot r^2\frac{\partial U_2}{\partial x} + 4R^2\cdot\frac{\partial U_2}{\partial x}\right\},\\ \mathbf{v} &= \frac{3}{19}\frac{\rho}{E}\left\{\frac{\partial(r^2U_2)}{\partial y} - \frac{7}{2}\, r^2\frac{\partial U_2}{\partial y} + 4R^2\cdot\frac{\partial U_2}{\partial y}\right\},\\ \mathbf{w} &= \frac{3}{19}\frac{\rho}{E}\left\{\frac{\partial(r^2U_2)}{\partial z} - \frac{7}{2}\cdot r^2\frac{\partial U_2}{\partial z} + 4R^2\cdot\frac{\partial U_2}{\partial z}\right\}. \end{aligned}\right. \qquad (16)$$

Cela posé, calculons le déplacement δR que subit un point de la surface sphérique par suite de la plasticité élastique de la matière soumise à la rotation ; il est la projection, sur la direction radiale (de cosinus directeurs $\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}$), du déplacement ($\mathbf{u}_R$, $\mathbf{v}_R$, $\mathbf{w}_R$) à la surface ; par suite,

$$\begin{aligned} \delta R &= \mathbf{u}_R\frac{x}{R} + \mathbf{v}_R\frac{y}{R} + \mathbf{w}_R\frac{z}{R}\\ &= \frac{3}{19}\frac{\rho}{E}\frac{1}{R}\left\{\sum\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)[r^2U_2] - \frac{7}{2}r^2\cdot\sum\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)[U_2]\right.\\ &\qquad \left. + 4R^2\cdot\sum\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)[U_2]\right\}_{r=R}\\ &= \frac{3}{19}\frac{\rho}{E}\left\{\frac{4R^2U_2}{R} - \frac{7}{2}\frac{R^2\cdot 2U_2}{R} + \frac{4R^2\cdot 2U_2}{R}\right\}\\ &= \frac{3}{19}\frac{\rho}{E}\{4R - 7R + 8R\}\,U_2 = \frac{15}{19}\frac{\rho}{E}RU_2. \end{aligned} \qquad (17)$$

D'autre part, cette augmentation de R est, d'après l'équation polaire du sphéroïde,

$$\delta R = r - R = R\varepsilon_2\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{15}{19}\frac{\rho}{E}RU_2 = R\varepsilon_2\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right),$$

ou

$$\varepsilon_2 \cdot \frac{19}{15}\frac{E}{\rho}\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right) = U_2, \quad (18)$$

ou, comme

$$U_2 = \frac{1}{2}\omega^2R^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{2}{3}\right),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{15}{38}\frac{\rho}{E}\omega^2R^2. \quad (19)$$

Telle est la valeur de l'ellipticité cherchée.

Nous pouvons écrire (18) sous la forme

$$\varepsilon_2 W_2 = U_2, \quad (20)$$

en posant

$$\left\{\begin{array}{l} W_2 = \dfrac{19}{15}\dfrac{E}{\rho}\left(\cos^2\vartheta - \dfrac{2}{3}\right), \quad (21) \\ U_2 = \dfrac{1}{2}\omega^2R^2\left(\cos^2\vartheta - \dfrac{2}{3}\right). \quad (22) \end{array}\right\}$$

ε_2 n'intervient pas dans U_2 (voyez plus haut).

Quelle est la valeur de ε_2 pour la Terre? Sa densité ρ (moyenne) nous est connue; elle est en unités C.G.S. :

$$\rho = 5{,}5 \text{ grammes-masse par centimètre cube.}$$

Mais son module d'élasticité nous est complètement inconnu. Remarquons seulement que si elle possédait l'élasticité de l'acier,

$$E = 2200000 \text{ kilogrammes par centimètre carré,}$$

soit en unités C. G. S :

$$2{,}2 \times 10^6 \times 10^3 \times 981 \text{ dynes par centimètre carré, alors}$$

$$\frac{\rho\omega^2R^2}{E} = 5{,}5 \cdot \left(\frac{2\pi}{360\times 60\times 60}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{\pi}10^9\right)^2 \cdot \frac{1}{2{,}2\times 10^9\times 981} = \frac{1}{184},$$

puis

$$\varepsilon_2 = \frac{15}{38}\,\frac{1}{184} = \frac{1}{465}. \quad (*)$$

* * *

Théorème de W. Thomson (**). — Enfin, supposons que la Terre soit un globe sphérique dont toutes les molécules s'attirent suivant la loi newtonnienne et réagissent l'une sur l'autre en vertu d'une élasticité bien déterminée (par exemple si l'on suppose la matière incompressible et possédant le module d'élasticité E); imaginons aussi qu'elle soit animée de la rotation uniforme *o* et que l'action de cette rotation soit encore de lui donner la forme d'un ellipsoïde aplati. Nous nous proposons de déterminer l'ellipticité ε_3 de cet ellipsoïde en fonction des ellipticités que nous avons désignées par ε_1 et ε_2.

Observons tout d'abord qu'ici les tensions élastiques et les résultantes des forces attractives sont des forces *centripètes* et luttent contre la force centrifuge de rotation : il est clair que l'ellipticité ε_3 sera moindre que ε_1 et que ε_2, puisque la résistance centripète est plus forte que dans le premier et le second problème.

Si les résultantes des forces attractives s'opposaient *seules* à la force centrifuge de rotation, nous aurions l'équation d'équilibre

$$\varepsilon_2 V_2 = U_2. \quad \text{[Équation (9) du premier problème.]}$$

Si les tensions élastiques luttaient *seules* contre cette force centrifuge, l'équation d'équilibre serait

$$\varepsilon_2 W_2 = U_2. \quad \text{[Équation (20) du second problème.]}$$

Mais, par hypothèse, ces forces attractives et ces tensions élas-

---

(*) Voyez à ce sujet W. Thomson, *Treatise on natural Philosophy*, t. II, 1883, spéc. art. 834; *Math. and physical Papers*, t. III, 1890, art. 45. — A. E. H. Love, *Elasticity*, Cambridge, 1892, t. I, chap. X.

(**) W. Thomson et P. G. Tait, *Treatise on natural Philosophy*, t. II, 1883, art. 840.

tiques réagissent ensemble et simultanément contre la force centrifuge; aussi, pour écrire que cette dernière leur fait équilibre sur l'ellipsoïde d'ellipticité ε_3, devons-nous exprimer que la partie U_2 (variable avec s, mais cependant indépendante des ellipticités) du potentiel U de la force centrifuge est égale à la somme du terme $\varepsilon_3 V_2$ du potentiel V des forces attractives et du terme $\varepsilon_3 W_2$ caractérisant l'action des forces élastiques ; donc

$$\varepsilon_3 (V_2 + W_2) = U_2,$$

ou, en divisant par $\varepsilon_3 U_2$,

$$\frac{1}{\varepsilon_3} = \frac{V_2}{U_2} + \frac{W_2}{U_2} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}, \quad (1)$$

d'après les équations précédentes.

Tel est le théorème de Thomson

Nous tirons de (1)

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (2).$$

* * *

Application a la Terre. — Nous avons montré, à la fin du § 3 de cette Deuxième Partie, que l'ellipticité ε qui intervient dans l'expression

$$T' = \frac{1}{\varepsilon} \text{ jours}$$

de la période eulérienne modifiée est (*)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon' = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad (3)$$

(*) Remarquons qu'on peut encore montrer, au moyen des considérations précédentes, que $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$. (Voyez § 3.) En effet, à l'état 1 (ellipticité ε_1, et

en sorte que

$$T' = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} \text{ jours} = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \text{jours.} \quad (4)$$

Si, comme plus haut, nous supposons que la Terre a été primitivement à l'état fluide incandescent et qu'elle s'est solidifiée sous cet état (ellipticité ε_1), nous avons, en la supposant aujourd'hui absolument rigide, pour période eulérienne

$$T = \frac{1}{\varepsilon_1} \text{ jours,}$$

tandis que, si nous faisons l'hypothèse qu'elle possède une certaine élasticité, nous obtenons

$$T' = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \text{jours.}$$

L'allongement relatif de la période eulérienne (dû à l'élasticité) est donc mesuré par le multiplicateur $1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > 1$.

Reste à voir si ce multiplicateur a de l'importance.

Supposons, comme le font d'ailleurs les sismologistes (*), que la Terre possède la rigidité de l'acier, alors

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{465}$$

---

forces attractives contrebalançant l'action centrifuge) nous avons

$$\varepsilon_1 V_2 = U_2,$$

tandis qu'à l'état 2 (plus de rotation ; ellipticité ε, et tensions élastiques luttant contre les forces attractives)

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon)\, W_2 = \varepsilon' W_2 = \varepsilon V_2,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 W_2}{W_2 + V_2} = \frac{\varepsilon_1 \frac{W_2}{U_2}}{\frac{W_2}{U_2} + \frac{V_2}{U_2}} = \frac{\varepsilon_1 \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1}} = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (3)$$

(*) Milne, op. cit., *British Assoc. Report*, 1896.

et

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{231}.$$

Donc $1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1{,}5$ environ. Ainsi *l'élasticité de la Terre pourrait allonger la période eulérienne de 50 °/₀, même si l'on imaginait qu'elle possédât la rigidité très considérable de l'acier.*

Comme nous l'avons fait remarquer à la fin du premier problème, la période eulérienne *véritable* (conforme aux observations de la précession) devrait être de

$$T = 305 \text{ jours}$$

au lieu de

$$T = 231 \text{ jours :}$$

cette différence proviendrait de l'*hétérogénéité* de la Terre.

Ainsi, si nous partons de

$$T = 305 \text{ jours,}$$

nous supposons implicitement que la Terre n'est pas homogène, et *il n'est pas légitime d'appliquer la conclusion énoncée ci-dessus.*

Si on le fait cependant, on trouve

$$T' = 305 \times 1{,}5 = 457 \text{ jours,}$$

période qui dépasse d'un mois celle de Chandler :

$$T' = 427 \text{ jours.}$$

D'après cela, la Terre devrait être encore plus rigide que l'acier.

On pourrait partir de

$$1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{14 \text{ mois}}{10 \text{ mois}} = 1{,}4$$

et en tirer la valeur de ε_2 :

$$\varepsilon_2' = 0{,}4\varepsilon_1;$$

tel serait le degré d'élasticité de la Terre; et en prenant de nouveau

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{231},$$

on obtiendrait

$$\varepsilon_2' = \frac{1}{578};$$

en sorte que, les ellipticités ε_2, ε_2' d'un globe d'acier et de la Terre réelle étant inversement proportionnelles aux modules E, E' d'élasticité, on aurait pour ce dernier module

$$E' = E\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2'} = E\frac{578}{465} = 1{,}24\,E,$$

c'est-à-dire que la Terre serait encore plus rigide que l'acier et que son module d'élasticité E' serait supérieur à celui E de l'acier presque de 25 %.

On voit donc que, *pour expliquer la transformation de la période d'Euler en celle de Chandler, il suffit de supposer que la Terre cède très peu aux actions centrifuges, c'est-à-dire de la considérer comme très peu élastique* (*).

Evidemment notre raisonnement ne satisfait pas complètement l'esprit. Mais il faut observer que nous n'avons en vue ici que d'expliquer les choses au point de vue *qualitatif* et non quantitatif. Il est permis de supposer qu'une *certaine hétérogénéité* ne détruit pas entièrement les conclusions étayées (**).

Nous ne nous attarderons pas davantage sur ce sujet et nous

(*) Voyez Sommerfeld, *op. et lib. cit.*, p. 701.

(**) Voyez par exemple Hough, Larmor, *op. cit.*

renverrons, pour des éclaircissements et détails, aux ouvrages qui traitent spécialement cette question (*).

* * *

Examinons quel peut être l'écart entre l'axe de figure OC′ de la forme instantanée de l'ellipsoïde élastique et l'axe primitif de figure OC (qu'il aurait si la rotation avait lieu autour de ce dernier).

Cet écart, que nous avons nommé précédemment ϑ_1 (§ 2), avait pour valeur approchée

$$\vartheta_1 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \times \text{angle COI}.$$

Les axes OC, OC′, OI sont dans un même plan et ils coupent le plan tangent en C à la sphère de rayon 1 suivant une droite CIC′. Nous pouvons prendre pour mesures des angles très petits que ces axes font entre eux, les segments qu'ils interceptent sur cette droite.

Par suite

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{CI}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Or

$$\varepsilon' = \varepsilon_1 - \varepsilon.$$

Donc

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{CI}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1} = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$$

(*) F. Tisserand, *Mécanique céleste,* t. II, 1891, pp. 221 et suiv. ; E. Wiechert, *Die Massenverteilung im Innern der Erde* (*Göttinger Nachr.*, 1897, p. 221 ;) G. H. Darwin, *Monthly Notices,* Londres, t. LX, 1899, n° 2 ; F. R. Helmert, *Sitzungsberichte der K. Ak.,* Berlin, 1901, p. 328 ; F. Klein et A. Sommerfeld, *Ueber die Theorie des Kreisels,* Leipzig, fasc. 3, 1903, pp. 702-703.

et aussi

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'I}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - 1.$$

Or $\frac{1}{\varepsilon} = 427$ et $\frac{1}{\varepsilon_1} = 305$, d'après les observations directes des latitudes et de la précession.

Donc

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{305}{427} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}; \quad \text{puis : } \overline{CC'} = \frac{2}{7} \times \overline{CI},$$

et

$$\overline{C'I} = \overline{CC'} \times \frac{1}{\frac{7}{5} - 1} = \frac{5}{2} \times \overline{CC'}.$$

D'après les observations, *à la surface de la Terre*, $\overline{CI}$ est, en moyenne, de 4 mètres; donc $\overline{CC'}$ est, en moyenne, de 1^m10.

Le pôle instantané de figure C' *décrirait à la surface du globe un cercle de* 1^m10 *de rayon avec la vitesse angulaire chandlérienne* $\frac{0}{427}$

Il n'est pas inutile de faire remarquer que S. Newcomb, le savant américain qui a le premier signalé l'élasticité de la Terre comme cause capable d'augmenter la période eulérienne, s'est mépris tout d'abord sur l'explication (*).

D'après nos calculs,

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'I}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 - \dfrac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\dfrac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

tandis que S. Newcomb (**) indiquait

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'I}} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

(*) Voyez S. S. Hough, *On the Rotation of an elastic Spheroid.* (Phil. Trans., 1896, partie A, pp. 341-342.)

(**) *On the Dynamics of the Earth's Rotation* .. (Monthly Notices, t. LXII, mars 1892, n° 5, pp. 338-339).

La raison de cet écart réside dans ce que Newcomb supposait que l'ellipticité $\varepsilon_3 = \varepsilon'$ (que la rotation du sphéroïde introduit) devait se superposer à l'ellipticité ε_1 de l'état 1 au lieu de l'ellipticité ε de l'état 2 (*); il trouvait alors

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'I}} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$$

au lieu de

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'I}} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} = \frac{\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}}{\dfrac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

* * *

Pour finir, disons un mot du *déplacement* (soulèvement ou abaissement) d'un point de la surface du globe élastique et de la *déviation de la verticale* qui peuvent résulter du mouvement angulaire ϑ_1 = angle COC' de l'axe de figure (**). Il est clair que, *si ces petits mouvements sont sensibles, leur mesure directe ne devra pas être en désaccord avec les valeurs exigées par l'élasticité du globe :* autrement cette dernière hypothèse serait à rejeter. Nous allons voir qu'elles ne sont guère décelables par l'observation.

A cette fin, rappelons les expressions (6) et (9) du paragraphe II de cette Deuxième Partie :

$$\begin{cases} r_1 = R\left[1 + (\varepsilon + \varepsilon')\left(\cos^2\vartheta - \dfrac{2}{3}\right)\right], & (6) \\ r_2 = R\left[1 + \varepsilon\cos^2\vartheta + \varepsilon'\cos^2(\vartheta - \lambda) - \dfrac{2}{3}(\varepsilon + \varepsilon')\right]; & (9) \end{cases}$$

dans ces expressions ϑ désigne la colatitude du lieu d'obser-

---

(*) Ou encore que l'on devait, pour obtenir l'ellipticité ε résultante (qui intervient dans l'expression $T' = \frac{1}{\varepsilon}$ de la période chandlérienne), ajouter ε' à ε_1 au lieu de l'en retrancher.

(**) Voyez encore Sommerfeld, *op* et *lib. cit.*, p. 705.

vation (comptée à partir de la même droite OA dans les deux formules), r_1 et r_2 ses distances au centre de gravité O de la Terre suivant que la rotation de l'ellipsoïde élastique terrestre a lieu autour de l'axe OC ou de l'axe OI (faisant avec OC l'angle très petit λ); ε est l'ellipticité primitive, ε' l'augmentation d'ellipticité due à la rotation.

Le soulèvement (ou l'abaissement) d'un point de la surface, résultant de la rotation autour d'un axe OI faisant avec OC l'angle λ et par conséquent du déplacement ϑ_1 de l'axe de figure, sera

$$r_2 - r_1 = R\varepsilon' [\cos^2(\vartheta - \lambda) - \cos^2\vartheta] = R\varepsilon'\lambda \sin 2\vartheta,$$

aux termes en λ^2 près.

Ce soulèvement est maximum pour $\vartheta = 45^\circ$, puisque alors $\sin 2\vartheta = 1$.

Le coefficient $R\varepsilon'\lambda$ est toujours très petit. $R\lambda$ n'est autre chose que la distance d qui sépare les pôles I, C à la surface du globe; cette distance est, comme nous l'avons vu, en moyenne de 4 mètres et toujours inférieure à 10 mètres (*). Le soulèvement maximum sera alors

$$R\varepsilon'\lambda = \varepsilon' d = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) d = \frac{1}{305}\left(1 - \frac{5}{7}\right) d$$

$$= \frac{2}{7}\frac{d}{305} = \frac{d}{1067{,}5} < \frac{10^m}{1067{,}5} < 0^m01,$$

ce qui n'est guère sensible.

Passons ensuite à la déviation du fil à plomb. L'angle que forme la normale en un point (au méridien du sphéroïde) avec le rayon vecteur est, en coordonnées polaires,

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta};$$

(*) Voyez Première partie, § 2.

cet angle est évidemment très petit; on peut donc écrire

$$\delta = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta}.$$

Ces angles sont donc dans les deux cas, d'après (6) et (9),

$$\left\{\begin{array}{l} \delta = -(\varepsilon + \varepsilon')\sin 2\vartheta, \\ \delta_2 = -\varepsilon \sin 2\vartheta - \varepsilon' \sin 2(\vartheta - \lambda), \end{array}\right\}$$

d'où l'expression de la déviation

$$i = \delta_2 - \delta = \varepsilon'[\sin 2\vartheta - \sin 2(\vartheta - \lambda)] = 2\varepsilon'\lambda \cos 2\vartheta.$$

Nous venons de voir que $\varepsilon' = \frac{2}{7}\frac{1}{305} < 0{,}001$, donc la déviation maxima $2\varepsilon'\lambda$ est inférieure au $\frac{1}{500}$ de la déviation $\lambda \leq 0''3$ de l'axe de rotation, soit à $0''0006$, ce qui est insensible.

* * *

Pour terminer ce que nous avons à dire sur ce sujet, nous mentionnerons l'influence que peut avoir l'eau répandue à la surface du globe. Il est clair que les océans s'adapteront très rapidement aux déplacements de l'axe de rotation, car leur viscosité est presque nulle : en sorte qu'on peut considérer la figure d'équilibre qu'ils affectent comme un ellipsoïde aplati ayant OI pour axe de figure. Mais le globe, étant supposé élastique, prendra, en dessous de la couverture liquide, la forme d'un ellipsoïde aplati ayant OC′ pour axe de figure (OC′ faisant avec OC l'angle $\vartheta_1 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \times$ angle COI). Nous avons affaire alors à deux surfaces ellipsoïdales n'ayant pas le même axe de figure.

L'influence des mers a encore pour effet d'allonger la période eulérienne; en sorte qu'une partie de l'écart qui existe entre les périodes eulérienne et chandlérienne pourrait avoir sa raison dans l'ellipticité que prendraient les océans.

Cette influence est très complexe et, par conséquent, très difficile à estimer.

S. Newcomb pensait qu'elle pouvait rendre compte du quart de la différence (*) ; mais il est probable que cette estimation est exagérée et que les continents ont pour effet de réduire les mouvements des mers.

Cependant S. Woodward (**), au contraire, a prétendu que l'écart tout entier pouvait être attribué à ces derniers.

Il est bon de rappeler encore ici les expériences de Van de Sande Bakhuyzen (***) et de Christie (IV) sur la mesure précise des marées.

TROISIÈME PARTIE

Explication des oscillations annuelles et apériodiques (oscillations de deuxième et troisième espèces)

Nous allons montrer dans cette partie de notre Travail que les oscillations de deuxième et de troisième espèces du pôle de rotation peuvent être dues à des phénomènes de transport de masses sur la surface de la Terre (ou même en son intérieur) ou dans l'atmosphère.

Mais il est nécessaire d'exposer tout d'abord une théorie qui est généralement peu connue : nous voulons parler de la théorie du mouvement de rotation d'un corps variable.

(*) *Op. cit.*, 1892.

(**) *Astronomical Journal*, 1896, t. XV, n° 345.

(***) *Astronomische Nachrichten*, n° 3261.

(IV) *Bull. Phil. Soc. Washington*, t. XII, 1895, p. 103; *Astr. Journal*, 1896, n° 351.

A. — Théorie du mouvement de rotation d'un corps variable.

§ 1. — *Etablissement des équations différentielles du mouvement.*

Voici la manière dont on peut concevoir donné le problème (*).

Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1 trois axes rectangulaires absolument fixes (**) ayant pour origine un point O autour duquel nous disons que le corps (variable de forme et de répartition interne) effectue sa rotation.

Soit un second système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ayant même origine et même orientation (pour fixer les idées) que le premier système ; nous supposons le trièdre $Oxyz$ mobile et nous l'appelons *trièdre de référence.*

Imaginons que l'on connaisse le mouvement de chaque point M du corps par rapport aux axes mobiles $Oxyz$, soit

$$\left\{\begin{array}{l} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{array}\right\}$$

et que l'on connaisse également les forces extérieures absolues agissant sur chaque point du corps. Le problème consiste à déterminer la rotation instantanée $\bar{o}$ du trièdre $Oxyz$ autour de O; alors, si l'on parvient à déterminer cette rotation instantanée et si l'on connaît la position initiale $Ox_0 y_0 z_0$ du trièdre de référence $Oxyz$, on connaîtra le mouvement absolu de chaque point M du corps par rapport aux axes absolus $Ox_1 y_1 z_1$.

Pour résoudre le problème, il s'agit donc d'intégrer les équa-

---

(*) Voyez notre opuscule : *Mouvement de rotation d'un corps de forme variable*,. Liége, janvier 1908, p 5.

(**) Dans l'acception connue [voyez p. ex. P. PAINLEVÉ, *Leçons sur l'Intégration des Équations de la Mécanique*. Hermann, Paris, 1897, 1re leçon].

tions différentielles contenant comme fonctions à déterminer les composantes p_1 suivant Ox_1, q_1 suivant Oy_1, r_1 suivant Oz_1 de la rotation $\bar{o}$, ou encore les équations différentielles des composantes p, q, r de cette rotation suivant les axes mobiles de référence Ox, Oy, Oz [ce sont ces dernières qui constituent les *équations d'Euler* au cas où chaque point M du système est en repos relativement aux axes $Oxyz$, c'est-à-dire où l'on a pour chaque point : $f_1(t) = C^{te}$, $f_2(t) = C^{te}$, $f_3(t) = C^{te}$].

Telle est la manière la plus simple de présenter la question, mais non la plus complète.

Nous voulons actuellement établir des équations différentielles de mouvement assez générales pour pouvoir y faire rentrer, comme cas particuliers, celles employées par les différents géomètres qui se sont occupés de la question.

A cette fin nous ferons choix de *trois* systèmes d'axes rectangulaires de même origine O et de même orientation :

1° Un système $Ox_1\, y_1\, z_1$ absolument fixe ;

2° Un système $Oxyz$ mobile dit *de référence* ;

3° Un système $O\xi\eta\zeta$ mobile également.

Nous supposons données les forces extérieures absolues agissant sur le corps et connu le mouvement

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = f_1(t), \\ \eta = f_2(t), \\ \zeta = f_3(t), \end{array}\right\} \qquad (1)$$

de chaque point M du corps par rapport aux axes mobiles $O\xi\eta\zeta$; nous nous imposons en outre une certaine relation entre les positions des deux trièdres mobiles $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$, de manière que la position de l'un d'eux suffise à déterminer celle de l'autre : la façon la plus simple dont on puisse concevoir donnée cette relation est d'imaginer que l'on connaisse à chaque instant la valeur

$$\left\{\begin{array}{l} \psi = \varphi_1(t), \\ \theta = \varphi_2(t), \\ \varphi = \varphi_3(t), \end{array}\right\} \qquad (2)$$

des angles d'Euler dont il faut faire tourner successivement, de la manière connue, le trièdre $Oxyz$ pour le faire coïncider avec $O\xi\eta\zeta$.

Remarquons que cette nouvelle manière d'envisager le problème revient absolument à se donner comme plus haut

$$\left\{\begin{array}{l} x = F_1(t), \\ y = F_2(t), \\ z = F_3(t), \end{array}\right\} \quad (3)$$

car si

$$\left\{\begin{array}{llllll} \alpha, \beta, \gamma \text{ sont les cosinus directeurs de } Ox \text{ par rapport à } O\xi, & O\eta & O\zeta, \\ \alpha', \beta', \gamma' & \text{»} & \text{»} & Oy & \text{»} & \text{»} \\ \alpha'', \beta'', \gamma'' & \text{»} & \text{»} & Oz & \text{»} & \text{»} \end{array}\right\}$$

on a les formules de transformation de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \\ y = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta, \\ z = \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta, \end{array}\right\} \quad (4)$$

et de plus les relations connues

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \beta = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (5)$$

Ces dernières relations font connaître les neuf cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' en fonction du temps, et, par les formules (4), on obtiendra x, y, z en fonction du temps.

Il est clair que, généralement, on ne donnera pas la liaison entre les deux trièdres mobiles sous la forme explicite (2); mais il suffit ici de faire voir à quelles conditions le problème est déterminé.

Le choix de trois systèmes d'axes semble de prime abord compliquer la question : mais on peut voir dans les travaux de plusieurs géomètres qu'il est souvent avantageux de traiter le

problème de cette manière et qu'on peut généralement simplifier ainsi, dans une notable mesure, l'intégration des équations différentielles du mouvement. On comprendra mieux la portée de cette observation plus bas.

Appelons $\overline{o}$ la rotation instantanée du trièdre $Oxyz$ autour de O, et p, q, r ses composantes suivant les positions instantanées de ces axes Ox, Oy, Oz.

Soit $\overline{\omega}$ la rotation instantanée du trièdre $O\xi\eta\zeta$ autour de O; soient ω_x, ω_y, ω_z ses composantes suivant les positions instantanées des axes de l'*autre* système mobile.

Enfin appelons A, B, C, D, E, F les moments et produits d'inertie du corps par rapport aux axes Ox, Oy, Oz :

$$\left\{\begin{array}{ll} A = \Sigma m\,(y^2 + z^2), & D = \Sigma myz, \\ B = \Sigma m\,(z^2 + x^2), & E = \Sigma mzx, \\ C = \Sigma m\,(x^2 + y^2), & F = \Sigma mxy. \end{array}\right\} \quad (6)$$

En premier lieu, déterminons les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la vitesse *absolue* $\overline{v}$ d'un point quelconque M du corps.

Cette vitesse absolue est la somme géométrique de deux autres vitesses : la vitesse $\overline{w}$ relative de M par rapport aux axes mobiles $O\xi\eta\zeta$ et la vitesse d'entraînement $\overline{v_e}$ de ce point due à la rotation instantanée de ce trièdre $O\xi\eta\zeta$. Ainsi

$$\overline{v} = \overline{w} + \overline{v_e}.$$

Pour traduire analytiquement cette égalité, nous écrirons séparément que la projection de $\overline{v}$ *sur chacun des axes* Ox, Oy, Oz *de référence* est égale à la somme algébrique des projections des vitesses $\overline{w}$ et $\overline{v_e}$. La vitesse d'entraînement du point M a évidemment pour composantes suivant Ox, Oy, Oz :

$$\left\{\begin{array}{l} v_{ex} = \omega_y z - \omega_z y, \\ v_{ey} = \omega_z x - \omega_x z, \\ v_{ez} = \omega_x y - \omega_y x, \end{array}\right\} \quad (7)$$

si l'on désigne par x, y, z les coordonnées de M par rapport à ces axes.

En appelant v_x, v_y, v_z et w_x, w_y, w_z les composantes de $\overline{v}$ et de $\overline{w}$ suivant ces axes, nous aurons donc

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = w_x + \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y = w_y + \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z = w_z + \omega_x y - \omega_y x; \end{array}\right. \quad (8)$$

il est donc bien entendu que w_x, w_y, w_z représentent les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la vitesse relative $\overline{w}$ de M par rapport aux axes $O\xi\eta\zeta$ (c'est-à-dire correspondant au déplacement élémentaire de composantes $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ qui se produit dans l'intervalle de temps dt).

Ces composantes v_x, v_y, v_z étant calculées, déterminons le moment résultant $\overline{OG}$ des quantités de mouvement absolu des divers points M du corps par rapport au point fixe O. Ce sera évidemment un vecteur ayant pour projections sur les axes de référence Ox, Oy, Oz :

$$\left\{\begin{array}{l} f = \Sigma m\,(v_z y - v_y z), \\ g = \Sigma m\,(v_x z - v_z x), \\ h = \Sigma m\,(v_y x - v_x y); \end{array}\right. \quad (9)$$

ces quantités sont également les moments résultants, par rapport aux axes de référence Ox, Oy, Oz, des quantités de mouvement absolu.

Si nous introduisons dans (9) les valeurs (8) de v_x, v_y, v_z, nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} f = \Sigma m\,[(w_z + \omega_x y - \omega_y x)y - (w_y + \omega_z x - \omega_x z)z] \\ \quad = \Sigma m(w_z y - w_y z) + \omega_x \cdot \Sigma m(y^2 + z^2) - \omega_y \cdot \Sigma m x y \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \omega_z \cdot \Sigma m z x \\ \quad = \Sigma m(w_z y - w_y z) + A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z, \text{ et de même :} \\ g = \Sigma m(w_x z - w_z x) - F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z, \\ h = \Sigma m(w_y x - w_x y) - E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z. \end{array}\right. \quad (10)$$

Les quantités

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_x = \Sigma m\,(w_z y - w_y z), \\ \sigma_y = \Sigma m\,(w_x z - w_z x), \\ \sigma_z = \Sigma m\,(w_y x - w_x y) \end{array}\right\} \quad (11)$$

sont évidemment les projections, sur les axes de référence Ox, Oy, Oz, du moment résultant $\overline{O\sigma}$, pris par rapport à O, des quantités de mouvement relatif des divers points du corps vis-à-vis des axes $O\xi\eta\zeta$ (c'est-à-dire correspondant au déplacement élémentaire de composantes $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ qui se produit dans l'intervalle du temps dt). Nous écrirons alors les expressions (10) sous la forme abrégée (*) :

$$\left\{\begin{array}{l} f = \sigma_x + A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z, \\ g = \sigma_y - F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z, \\ h = \sigma_z - E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Telles sont les expressions cherchées de la projection du moment résultant $\overline{OG}$ des quantités de mouvement absolu sur les axes mobiles de référence Ox, Oy, Oz.

Ces préliminaires posés, cherchons les équations du mouvement. La *méthode d'Euler*, élégante entre toutes, convient encore à ce problème général (**) ; elle consiste, comme on sait, à employer une représentation cinématique basée sur le théorème des moments des quantités de mouvement. Ce théorème nous apprend que le vecteur $\overline{OW}$, moment résultant par rapport à O des forces extérieures absolues, est équipollent à la vitesse du point G (extrémité du vecteur $\overline{OG}$ représentant le moment résultant des quantités de mouvement absolu des divers points du corps) sur l'indicatrice du moment résultant des quantités de mouvement.

(*) Cf. F. Tisserand, *Mécanique céleste*, t. II, 1891, p. 507.

(**) Cf. P. Appell, *Mécanique rationnelle*, t. II, 2me éd., 1904, pp. 149 et 203. Voyez aussi F. Klein et A. Sommerfeld, *Ueber die Theorie des Kreisels*, 1er fascicule, 1897, p. 141.

Pour traduire ce théorème, nous projetterons $\overline{OW}$ et la vitesse absolue de G sur les axes mobiles Ox, Oy, Oz de référence, et nous écrirons que leurs projections sont égales. Nous désignons les projections de $\overline{OW}$ par L, M, N : ce sont donc aussi les moments résultants des forces extérieures par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

La vitesse $\overline{v_G}$ de G se compose de la vitesse relative $\overline{v_{rG}}$ par rapport aux axes $Oxyz$ et de la vitesse d'entraînement $\overline{v_{eG}}$ due à la rotation $\overline{\omega}$ de ces axes :

$$\overline{v}_G = \overline{v}_{rG} + \overline{v}_{eG}.$$

En projetant sur les axes $Oxyz$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} v_G^x = v_{rG}^x + v_{eG}^x, \\ v_G^y = v_{rG}^y + v_{eG}^y, \\ v_G^z = v_{rG}^z + v_{eG}^z. \end{array} \right. \quad (13)$$

Or le point G, ayant pour coordonnées f, g, h par rapport aux axes $Oxyz$, a évidemment pour projections (sur ces axes) de sa vitesse relative par rapport à ces axes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{rG}^x = \dfrac{df}{dt}, \\ v_{rG}^y = \dfrac{dg}{dt}, \\ v_{rG}^z = \dfrac{dh}{dt}. \end{array} \right. \quad (14)$$

La vitesse d'entraînement a aussi pour projections sur ces axes Ox, Oy, Oz :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{eG}^x = qh - rg, \\ v_{eG}^y = rf - ph, \\ v_{eG}^z = pg - qf. \end{array} \right. \quad (15)$$

Par conséquent la vitesse absolue $\overline{v_G}$ de G a, d'après (14) et

(15), pour composantes suivant les axes mobiles $Oxyz$ de référence, les vitesses

$$\left\{\begin{array}{l} v_G^x = \dfrac{df}{dt} + qh - rg, \\ v_G^y = \dfrac{dg}{dt} + rf - ph, \\ v_G^z = \dfrac{dh}{dt} + pg - qf, \end{array}\right.$$

D'après le théorème rappelé (relatif au moment des quantités de mouvement), ces vitesses doivent être égales à L, M, N. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df}{dt} + qh - rg = \mathrm{L}, \\ \dfrac{dg}{dt} + rf - ph = \mathrm{M}, \\ \dfrac{dh}{dt} + pg - qf = \mathrm{N}. \end{array}\right. \qquad (16)$$

Telles sont les équations générales du mouvement que nous avions en vue d'établir : f, g, h y ont les valeurs (12) que nous venons de déterminer.

* * *

Pour de plus amples développements sur ce sujet, voir la Note placée à la fin de ce Travail.

§ 2. — *Emploi des équations différentielles établies ; leur application à la solution du problème. Choix des systèmes d'axes mobiles.*

Examinons maintenant comment nous pouvons appliquer les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df}{dt} + qh - rg = \mathrm{L}, \\ \dfrac{dg}{dt} + rf - ph = \mathrm{M}, \\ \dfrac{dh}{dt} + pg - qf = \mathrm{N}, \end{array}\right. \qquad (16)$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} f = \Sigma m\,(w_z y - w_y z) + A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z, \\ g = \Sigma m\,(w_x z - w_z x) - F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z, \\ h = \Sigma m\,(w_y x - w_x y) - E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z, \end{array}\right\} \quad (10)$$

à la solution de notre problème.

Nous supposons données les équations de mouvement

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = f_1(t), \\ \eta = f_2(t), \\ \zeta = f_3(t), \end{array}\right\} \quad (1)$$

et de plus

$$\left\{\begin{array}{l} \psi = \varphi_1(t), \\ \theta = \varphi_2(t), \\ \varphi = \varphi_3(t); \end{array}\right\} \quad (2)$$

dans ces équations ξ, η, ζ représentent les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point M du corps variable par rapport au trièdre mobile $O\xi\eta\zeta$, et ψ, θ, φ désignent les angles dont il faut faire tourner le trièdre $Oxyz$, respectivement et successivement autour de Oz, de l'intersection OU des plans xOy et $\xi O\eta$, et de $O\zeta$, pour le faire coïncider avec le trièdre $O\xi\eta\zeta$.

Comme nous l'avons fait remarquer au commencement du paragraphe précédent, des relations (1) et (2) on déduit immédiatement les valeurs des coordonnées x, y, z en fonction du temps :

$$\left\{\begin{array}{l} x = F_1(t), \\ y = F_2(t), \\ z = F_3(t), \end{array}\right\} \quad (3)$$

et par conséquent aussi celles des moments et produits d'inertie

$$\left\{\begin{array}{ll} A = \Sigma m\,(y^2 + z^2), & D = \Sigma myz, \\ B = \Sigma m\,(z^2 + x^2), & E = \Sigma mzx, \\ C = \Sigma m\,(x^2 + y^2), & F = \Sigma mxy, \end{array}\right\} \quad (6)$$

en fonction du temps t.

Les valeurs de w_x, w_y, w_z, savoir (*)

$$\left\{\begin{array}{l} w_x = \alpha\,\dfrac{d\xi}{dt} + \beta\,\dfrac{d\eta}{dt} + \gamma\,\dfrac{d\zeta}{dt}, \\ w_y = \alpha'\,\dfrac{d\xi}{dt} + \beta'\,\dfrac{d\eta}{dt} + \gamma'\,\dfrac{d\zeta}{dt}, \\ w_z = \alpha''\,\dfrac{d\xi}{dt} + \beta''\,\dfrac{d\eta}{dt} + \gamma''\,\dfrac{d\zeta}{dt}, \end{array}\right. \qquad (17)$$

sont aussi, d'après (1), (2) et (5), exprimables en fonction de t.

Il résulte donc qu'en vertu de (10), (17), (1) et (6), f, g, h pourront s'exprimer en fonction du temps t et des composantes ω_x, ω_y, ω_z de la rotation $\overline{\omega}$ du trièdre $O\xi\eta\zeta$.

Cette rotation se compose de la rotation $\overline{o}$ du trièdre $Oxyz$ et de la rotation $\overline{o'}$ qui amènerait $Oxyz$ en coïncidence avec $O\xi\eta\zeta$.

$$\overline{\omega} = \overline{o} + \overline{o'}.$$

Cette dernière rotation $\overline{o'}$ se compose, à son tour, des trois rotations eulériennes (**)

$$\left\{\begin{array}{l} \psi' \text{ autour de } Oz, \\ \theta' \text{ autour de l'intersection OU des plans } xOy \text{ et } \xi O\eta, \\ \varphi' \text{ autour de } O\zeta, \end{array}\right.$$

soit

$$\overline{o'} = \overline{\psi'} + \overline{\theta'} + \overline{\varphi'}.$$

En projetant l'égalité vectorielle

$$\overline{\omega} - \overline{o} = \overline{o'} = \overline{\psi'} + \overline{\theta'} + \overline{\varphi'}$$

(*) Voyez notre opuscule, p. 13. Une légère erreur s'y est glissée : ce sont les valeurs de w_x, w_y, w_z, données ici, qui sont correctes.

(**) ψ', θ', φ' désignent ici les dérivées $\dfrac{d\psi}{dt}$, $\dfrac{d\theta}{dt}$, $\dfrac{d\varphi}{dt}$.

sur les trois axes Ox, Oy, Oz, nous aurons donc

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_x - p = \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\psi \sin\theta, \\ \omega_y - q = \theta' \sin\psi - \varphi' \cos\psi \sin\theta, \\ \omega_z - r = \psi' + \varphi' \cos\theta. \end{array}\right. \quad (18)$$

Au moyen de ces relations nous pourrons exprimer ω_x, ω_y, ω_z en fonction de p, q, r et de t.

f, g, h se mettront alors sous forme de fonctions de p, q, r et de t :

$$\left\{\begin{array}{l} f = \mathrm{F}(p, q, r, t), \\ g = \mathrm{G}(p, q, r, t), \\ h = \mathrm{H}(p, q, r, t). \end{array}\right. \quad (19)$$

Cela posé, désignons par ψ_1, θ_1, φ_1 les angles eulériens dont il faut faire tourner le trièdre $Ox_1\, y_1\, z_1$, respectivement et successivement autour de Oz_1, de l'intersection OU_1 des plans $x_1\, Oy_1$ et xOy, et de Oz, pour l'amener en coïncidence avec le trièdre $Oxyz$.

Les moments résultants L, M, N des forces extérieures absolues par rapport aux axes de référence Ox, Oy, Oz peuvent être fonctions des positions des points, de leurs vitesses et du temps t; en d'autres termes, dans le cas général L, M, N sont fonctions des angles eulériens ψ_1, θ_1, φ_1, de leurs dérivées ψ'_1, θ'_1, φ'_1 et du temps t (car si les coordonnées relatives interviennent dans leurs expressions, on peut supposer qu'elles sont remplacées par leurs valeurs en fonction du temps).

Nous pourrons donc écrire

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = \Phi_1(\psi_1, \theta_1, \varphi_1, \psi'_1, \theta'_1, \varphi'_1, t), \\ \mathrm{M} = \Phi_2(\psi_1, \theta_1, \varphi_1, \psi'_1, \theta'_1, \varphi'_1, t), \\ \mathrm{N} = \Phi_3(\psi_1, \theta_1, \varphi_1, \psi'_1, \theta'_1, \varphi'_1, t), \end{array}\right.$$

ou encore, puisque

$$\left\{\begin{array}{l} p = \psi'_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1 + \theta'_1 \cos\varphi_1, \\ q = \psi'_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1 - \theta'_1 \sin\varphi_1, \\ r = \psi'_1 \cos\theta_1 + \varphi'_1, \end{array}\right. \quad (20)$$

sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = \mathrm{L}\,(\psi_1, \theta_1, \varphi_1, p, q, r, t), \\ \mathrm{M} = \mathrm{M}\,(\psi_1, \theta_1, \varphi_1, p, q, r, t), \\ \mathrm{N} = \mathrm{N}\,(\psi_1, \theta_1, \varphi_1, p, q, r, t). \end{array}\right\} \quad (21)$$

En introduisant les valeurs (19) et (21) dans les équations (16), nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\mathrm{F}(p,q,r,t)}{dt} + q.\,\mathrm{H}(p,q,r,t) - r.\,\mathrm{G}(p,q,r,t) = \mathrm{L}(\psi_1, \theta_1, \varphi_1, p, q, r, t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (22)$$

En combinant ces équations avec les relations (20), nous avons un système de six équations différentielles du premier ordre en p, q, r, ψ_1, θ_1, φ_1 ; ou encore, si nous voulons substituer les valeurs (20) dans les équations (22), un système de trois équations différentielles du second ordre en ψ_1, θ_1, φ_1.

Il s'introduira évidemment par l'intégration six constantes qui seront déterminées si l'on connaît, par exemple, les valeurs initiales de ψ_1, θ_1, φ_1, p, q, r.

Connaissant ψ_1, θ_1, φ_1 en fonction du temps, nous pouvons fixer à chaque instant, dans l'espace absolu, la position du trièdre de référence $Oxyz$ et, par conséquent, celle du trièdre $O\xi\eta\zeta$: en d'autres termes le problème est résolu.

* * *

L'intégration rigoureuse des équations (16) ou (22) est évidemment irréalisable dans le cas général.

Si l'on se borne à l'étude du mouvement de rotation naturelle ($\mathrm{L} = \mathrm{M} = \mathrm{N} = 0$) d'un système variable, dont on suppose les moments d'inertie principaux égaux à chaque instant ($A = B = C$), cette intégration se ramène à la résolution d'une équation de Riccati ; si cette dernière est effectuée, le calcul des neuf cosinus

(des angles formés par les axes principaux avec les axes fixes $Ox_1\ y_1\ z_1$) peut s'obtenir par l'intégration d'une équation du même genre (*).

Mais ceci ne regarde pas directement notre objet, car les moments principaux polaire C et équatorial A de la Terre sont nécessairement inégaux, quels que soient les changements que l'on suppose s'effectuer en elle.

Lorsqu'on se place dans l'hypothèse que les composantes p, q sont suffisamment petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits, et qu'on suppose que r ne diffère d'une constante n que d'une quantité n' du même ordre que p et q (**) :

$$r = n + n',$$

le calcul des cosinus peut être effectué de la façon suivante, indiquée par H. Gyldén dans son Mémoire de 1871 (***).

Nous pouvons écrire les équations (20) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= (n + n') - (p \sin\varphi_1 + q\cos\varphi_1)\operatorname{cotg}\theta_1, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= p\cos\varphi_1 - q\sin\varphi_1, \\ \sin\theta_1 \frac{d\psi_1}{dt} &= p\sin\varphi_1 + q\cos\varphi_1. \end{aligned}\right. \qquad (20')$$

(*) Voyez L. Picart, *Sur la rotation d'un corps variable* (Ann. Obs. Bordeaux, t. VII, 1897, § 7.) Consultez aussi G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, chap. II, et les recherches de V. Volterra [Cf. *Bulletin astronomique*, t. XIII, 1896].

(**) C'est ce qui se présente notamment pour la Terre, quand on suppose qu'il se produit des petits déplacements de masse en son intérieur ou à sa surface.

(***) *Recherches sur la rotation de la Terre.* (Nova Acta Soc. Reg. Upsaliensis, 3me série, t. VIII, 1871, 1er fascicule, § 2).

Alors nous avons immédiatement, au degré d'approximation voulu,

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = n(t-t^0) + \displaystyle\int_{t^0}^{t} n'dt - \operatorname{cotg}\theta_1^0 \cdot \int_{t^0}^{t} [p \sin n'(t-t^0) + q\cos n(t-t^0)]\,dt, \\ \text{puis} \\ \theta_1 = \theta_1^0 + \displaystyle\int_{t^0}^{t} [p\cos n\,(t-t^0) - q\sin n\,(t-t^0)]\,dt, \\ \psi_1 = \psi_1^0 + \dfrac{1}{\sin\theta_1^0} \displaystyle\int_{t^0}^{t} [p\sin n\,(t-t^0) + q\cos n\,(t-t^0)]\,dt, \end{array}\right. \tag{23}$$

t^0, $\theta_1{}^0$ et $\psi_1{}^0$ étant les valeurs initiales de t, θ_1 et ψ_1.

Si nous supposons $\psi_1{}^0 = 0$ et si nous posons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{t^0}^{t} n'dt = \chi, \\ \displaystyle\int_{t^0}^{t} [p\sin n\,(t-t^0) + q\cos n\,(t-t^0)]\,dt = \lambda, \\ \displaystyle\int_{t^0}^{t} [p\cos n\,(t-t^0) - q\sin n\,(t-t^0)]\,dt = \mu, \end{array}\right.$$

nous aurons, en ne conservant que les premières puissances de χ, λ, μ,

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\varphi_1 = \sin n\,(t-t^0) + (\chi - \lambda\operatorname{cotg}\theta_1^0)\cos n\,(t-t^0), \\ \cos\varphi_1 = \cos n\,(t-t^0) - (\chi - \lambda\operatorname{cotg}\theta_1^0)\cos n\,(t-t^0), \\ \sin\theta_1 = \sin\theta_1^0 + \mu\cos\theta_1^0, \\ \cos\theta_1 = \cos\theta_1^0 - \mu\sin\theta_1^0, \\ \sin\psi_1 = \dfrac{\lambda}{\sin\theta_1^0}, \\ \cos\psi_1 = 1. \end{array}\right. \tag{24}$$

En introduisant ces valeurs dans les expressions connues (*)

(*) Analogues aux relations (5).

des cosinus directeurs, nous obtiendrons, si nous négligeons encore les puissances de χ, λ, μ supérieures à la première,

$$\left\{\begin{aligned}
a &= \cos n(t-t^0) - \chi \sin n(t-t^0),\\
b &= \cos\theta_1^0 \,.\, \sin n(t-t^0) - \mu \sin\theta_1^0 \,.\, \sin n(t-t^0)\\
&\quad + \chi \cos\theta_1^0 \,.\, \cos n(t-t^0),\\
c &= \sin\theta_1^0 \,.\, \sin n(t-t^0) + \mu \cos\theta_1^0 \,.\, \sin n(t-t^0)\\
&\quad + (\chi \sin\theta_1^0 - \lambda \cos\theta_1^0) \,.\, \cos n(t-t^0),\\
a' &= -\sin n(t-t^0) - \chi \cos n(t-t^0),\\
b' &= \cos\theta_1^0 \,.\, \cos n(t-t^0) - \mu \sin\theta_1^0 \,.\, \cos n(t-t^0)\\
&\quad - \chi \cos\theta_1^0 \,.\, \sin n(t-t^0),\\
c' &= \sin\theta_1^0 \,.\, \cos n(t-t^0) + \mu \cos\theta_1^0 \,.\, \cos n(t-t^0)\\
&\quad - (\chi \sin\theta_1^0 - \lambda \cos\theta_1^0) \,.\, \sin n(t-t^0),\\
a'' &= \lambda,\\
b'' &= \sin\theta_1^0 - \mu \cos\theta_1^0,\\
c'' &= \cos\theta_1^0 - \mu \sin\theta_1^0.
\end{aligned}\right. \qquad (25)$$

Occupons-nous à présent des différents cas particuliers qui peuvent se présenter pour la forme des équations différentielles du mouvement, lorsqu'on adopte tels ou tels systèmes d'axes mobiles.

Ce choix est généralement assez délicat (*).

A. — Système rigide.

1. D'une manière générale, pour un système rigide, le plus simple est de prendre pour axes $Oxyz$ et $O\xi\eta\zeta$ deux systèmes d'axes rectangulaires fixés dans ce système; ces deux systèmes d'axes peuvent coïncider ou non (**). Les moments relatifs sont évidemment nuls: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. De plus $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, $r = \omega_z$

(*) Voyez notre opuscule, p. 14.

(**) Il est clair que, dans ce cas, il est absolument inutile d'introduire deux systèmes $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$ différents.

et A, B, C, D, E, F sont constants. Les équations du mouvement prennent alors la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} - F\dfrac{dq}{dt} - D\dfrac{dr}{dt} + q(-Er - Dq + Cr) \\ \qquad - r(-Fp + Bq - Dr) = L, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (A)$$

2. Si de plus nous choisissons pour axes $Oxyz$, fixes dans le corps, les axes principaux d'inertie, nous avons $A = A$, $B = B$, $C = C$, $D = E = F = 0$, et les équations s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)rq = L, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (B)$$

où A, B, C désignent les moments principaux d'inertie constants du corps rigide par rapport au point O. Nous retrouvons ainsi les équations d'Euler que nous avons employées dans l'Introduction.

3. Il n'est pas toujours plus simple de choisir les axes mobiles fixés invariablement au corps rigide. On peut prendre pour axes de référence $Oxyz$, des axes *mobiles aussi par rapport au corps*, et conserver pour axes $O\xi\eta\zeta$ des axes liés invariablement à ce dernier. On a alors simplement : $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, et les équations du mouvement sont :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z) + q(-E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z) \\ \qquad - r(-F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z) = L, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (C)$$

ω_x, ω_y, ω_z représentent ici les composantes suivant les axes

mobiles Ox, Oy, Oz de la rotation $\overline{\omega}$ du solide. A, B, C, D, E, F ne sont plus des constantes.

Ces équations ont été employées par Slesser (*), par Routh (**), par Puiseux (***), par Résal (iv), par Appell (v), etc.

En particulier on peut les utiliser pour simplifier le calcul de la précession solaire (vi).

B. — Système variable.

C'est surtout ici que le choix des axes mobiles devient une chose délicate.

1. Dans le cas où le corps a une partie rigide, on peut, si l'on veut, y fixer d'une manière invariable l'un ou l'autre (ou même tous les deux) système d'axes $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$. On remarquera que x, y, z ne sont pas en général des constantes; par conséquent, A, B, C, D, E, F ne le sont pas non plus.

Nous donnerons plus loin des applications de ce cas particulier.

Helmert (vii) et Sommerfeld (viii) l'ont traité fort heureusement.

2. Si l'on choisit pour axes $Oxyz$ les axes principaux *instantanés* du corps et pour $O\xi\eta\zeta$ des axes rectangulaires (fixés au trièdre d'axes principaux) coïncidant par exemple avec eux, on a à chaque instant : $\omega_x = p$, $\omega_y = q$, $\omega_z = r$, $D = E = F = 0$, $A = A$, $B = B$, $C = C$, mais les moments principaux A, B, C

(*) *Cambridge Quarterly Journal*, t. II, 1861.

(**) *Rigid Dynamics*, t II, 1884.

(***) *Théorie du mouvement de la Terre autour de son centre.*

(iv) *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, 1884, p. 383.

(*Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, 2me éd., 1904, p. 204.

(vi) Routh, *op.* et *lib. cit.*, p. 273. Voyez aussi F. Tisserand, *op.* et *lib. cit.*, p. 510.

(vii) *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, t. II, 1884, chap. V.

(viii) *Op. cit.*, 3me fasc., 1903, chap. VIII, section B, p. 716. Voyez section B, litt. b, § 2 de cette Partie.

sont variables avec le temps t. Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(\sigma_x + Ap) + q(\sigma_z + Cr) - r(\sigma_y + Bq) = \mathrm{L}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (\mathrm{D})$$

Liouville (*) s'est servi de ces équations pour étudier le mouvement de rotation naturelle ($\mathrm{L} = \mathrm{M} = \mathrm{N} = 0$) d'un corps qui se déforme en restant constamment symétrique par rapport à ses plans principaux (par exemple dans une dilatation, si le corps est homogène). On a évidemment alors $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, et les équations (D) deviennent simplement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(Ap) + (C - B)rq = \mathrm{L} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (\mathrm{E})$$

On peut aussi, avec Volterra (**) et Sommerfeld (***), étudier le mouvement d'un corps dont les moments principaux d'inertie restent constants, les seuls mouvements internes étant *cycliques*.

Alors σ_x, σ_y, σ_z ne sont plus nuls, mais A, B, C restent invariables, et les équations (D) s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\sigma_x}{dt} + A\dfrac{dp}{dt} + (q\sigma_z - r\sigma_y) + (C - B)rq = \mathrm{L}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (\mathrm{F})$$

(*) *Journal de Math. pures et appliquées*, 2me série, t. III, 1858; *Add. à la Connaissance des Temps pour 1859*. Voyez aussi Schwahn, Helmert, Tisserand, Picart, *op. cit.*

(**) *Acta mathematica*, t. XXII, 1898.

(***) *Op.* et *lib. cit.*, p. 712. Voyez aussi section B, litt. a de cette Troisième partie.

3. On peut encore prendre pour axes $Oxyz$ les axes principaux d'inertie instantanés et pour axes $O\xi\eta\zeta$ des axes rectangulaires supposés fixes dans le corps, figé lui-même dans la configuration qu'il a à un instant bien déterminé. C'est ce qu'a fait Darwin (*). Alors $D = E = F = 0$, et les équations du mouvement s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(\sigma_x + A\omega_x) + q(\sigma_z + C\omega_z) - r(\sigma_y + B\omega_y) = L, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (G)$$

Dans son célèbre Mémoire de 1877, le savant anglais a calculé $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ dans quelques cas particuliers ; mais dans ces cas (relatifs à de petits changements qui peuvent se produire dans ou sur la Terre), ces quantités ont été toujours très petites ; par suite il est, en fait, arrivé à poser $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ et est rentré ainsi (**) dans le cas que nous allons traiter immédiatement.

Axes moyens. — Nous avons obtenu précédemment les expressions

$$\left\{\begin{array}{l} f = \sigma_x + A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z, \\ g = \sigma_y - F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z, \\ h = \sigma_z - E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z \end{array}\right\} \quad (12)$$

des composantes du moment résultant des quantités de mouvement absolu suivant les axes Ox, Oy, Oz.

On voit immédiatement que ce moment résultant $\overline{OG}$ est la somme géométrique de deux autres moments résultants de quantités de mouvement : l'un $\overline{OG'}$ de composantes

$$\left\{\begin{array}{l} f' = \quad A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z, \\ g' = -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z, \\ h' = -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z, \end{array}\right\} \quad (12')$$

(*) *Influence of the geological changes....* (Phil. Trans., 1877, t. CLXVII.)

(**) Voyez Helmert, *Vierteljahrschrift der ast. Ges.*, Leipzig, 1878, p. 312 et *op. cit.*, t. II, 1884, p. 410 ; Schwahn, *op. cit.*, § 4.

est dû au mouvement de rotation du trièdre $O\xi\eta\zeta$; l'autre $\overline{O\sigma}$ de composantes

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_x = \Sigma m\,(w_z y - w_y z),\\ \sigma_y = \Sigma m\,(w_x z - w_z x),\\ \sigma_z = \Sigma m\,(w_y x - w_x y),\end{array}\right\} \quad (11)$$

est dû au mouvement relatif des différentes parties du corps par rapport à ce trièdre. Ainsi

$$\overline{OG} = \overline{OG'} + \overline{O\sigma}.$$

Il résulte d'une remarque faite par Poinsot que, étant donné un système quelconque en mouvement autour d'un point fixe, on peut déterminer une rotation autour d'un axe passant par ce point telle que, si cette rotation est communiquée au système *supposé solidifié*, l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui en proviennent soit égal en grandeur, direction et sens à l'axe du moment analogue se rapportant au mouvement réel; en d'autres termes, on peut déterminer une rotation, autour d'un axe passant par O, qui, communiquée au corps supposé solidifié, rende l'axe $\overline{OG'}$ géométriquement égal à l'axe $\overline{OG}$ du moment résultant des quantités de mouvement, provenant des mouvements véritables des différents points du corps.

En effet, nous pouvons choisir pour axes $O\xi\eta\zeta$ trois axes rectangulaires pour lesquels, à chaque instant, on ait

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_x = 0,\\ \sigma_y = 0,\\ \sigma_z = 0,\end{array}\right\} \quad (11')$$

c'est-à-dire

$$\overline{O\sigma} = 0;$$

alors

$$\overline{OG'} = \overline{OG}.$$

Dans ce cas, le moment résultant $\overline{O\sigma}$ des quantités de mouve-

ment relatif est nul; on peut dire qu'il y a *absence de courants* pour les axes $O\xi\eta\zeta$ choisis de cette façon: en effet, la rotation du trièdre $O\xi\eta\zeta$ se produit de manière que les *courants* (déplacements relatifs) se compensent, se neutralisent, se détruisent (*). Il est donc naturel d'appeler, avec Helmert et Radau, cette rotation la "*rotation moyenne*„ du corps variable (qui devient évidemment la *rotation actuelle* du corps, si ce dernier est rigide).

Mais, comme le font remarquer avec beaucoup de justesse ces deux géomètres, les trois conditions (11′) ne déterminent que la rotation moyenne sans fixer la position des axes $O\xi\eta\zeta$ par rapport au corps. Pour que celle-ci soit complètement déterminée, il est nécessaire d'assigner à ces axes une position initiale donnée, par exemple de les faire coïncider avec les axes principaux au temps $t = 0$. [C'est analogue à ce fait que les conditions $d\xi = d\eta = d\zeta = 0$, dans le cas d'un corps rigide, définissent des axes fixes dans le corps, sans que la position de chaque axe $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ soit précisée.]

Des axes définis de cette façon seront désormais appelés *axes moyens*.

Cette notion une fois introduite, nous pouvons encore simplifier la forme (G) des équations différentielles du mouvement.

En effet, si nous prenons pour axes $Oxyz$ les *axes principaux instantanés* du corps et pour axes $O\xi\eta\zeta$ les *axes moyens* (qui coïncident par exemple avec $Oxyz$ à l'époque initiale), nous aurons précisé, d'après les indications de Helmert (**), la position des axes choisis par Darwin. Dans ce cas, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, $A = A$, $B = B$, $C = C$, $D = E = F = 0$, et les équations du mouvement prennent la forme très simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(A\omega_x) + q(C\omega_z) - r(B\omega_y) = L, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right\} \quad (H)$$

(*) F. Tisserand, *Mécanique céleste*, t. II, 1891, p. 506.

(**) *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, t II, 1884, p. 410.

Nous développerons plus loin une application très importante de ces équations (*).

4. Enfin, on peut encore prendre pour axes $Oxyz$ et $O\xi\eta\zeta$ (coïncidents) les axes moyens à chaque instant. C'est ce qu'a fait Gyldén dans ses *Recherches sur la rotation de la Terre* (**). On a alors : $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, $r = \omega_z$, et pour équations différentielles du mouvement :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(Ap - Fq - Er) + q(-Ep - Dq + Cr) \\ \qquad\qquad - r(-Fp + Bq - Dr) = L, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (I)$$

* * *

Faisons remarquer, pour terminer, que la manière de poser et de résoudre le problème, telle que nous l'avons exposée au commencement de ce paragraphe, n'a été donnée que dans un seul but : montrer que la question est bien déterminée et que la solution en est possible.

Dans la plupart des cas particuliers, le problème ne sera pas posé de cette façon.

Voici encore une manière d'envisager la question.

Choisissons les axes principaux instantanés du corps pour axes $Oxyz$ et les axes moyens pour axes $O\xi\eta\zeta$; les équations du mouvement prennent alors la forme (H). Au lieu de donner le mouvement

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_i = \Xi_i(t), \\ \eta_i = H_i(t), \\ \zeta_i = Z_i(t), \end{array}\right\} \quad (1') \qquad (\text{où } i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*) Voyez Troisième partie, section B, litt. b, § 2.

(**) *Nova Acta Soc. Reg. Upsaliensis*, 3me série, t. VIII, 1er fascicule, 1871.

de chacun des n points du corps par rapport aux axes moyens (*), on peut astreindre ces points à satisfaire à $3n - 3$ équations de liaison (**), que nous supposons, pour fixer les idées, pouvoir s'exprimer par

$$L_j(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n, t) = 0 \quad (l)$$
$$(\text{où } j = 1, 2, \ldots, 3n - 3),$$

et aux trois équations (11′) qui définissent la rotation moyenne, savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 0, \\ \sigma_y = 0, \\ \sigma_z = 0. \end{array} \right\} \quad (11')$$

En désignant par μ_ξ, μ_η, μ_ζ les projections du moment relatif $\overline{O\sigma}$ sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \alpha\mu_\xi + \beta\mu_\eta + \gamma\mu_\zeta, \\ \sigma_y = \alpha'\mu_\xi + \beta'\mu_\eta + \gamma'\mu_\zeta, \\ \sigma_z = \alpha''\mu_\xi + \beta''\mu_\eta + \gamma''\mu_\zeta. \end{array} \right\} \quad (11'')$$

Les équations (11′) équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\xi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d\zeta_i}{dt} \eta_i - \frac{d\eta_i}{dt} \zeta_i \right) = 0, \\ \mu_\eta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d\xi_i}{dt} \zeta_i - \frac{d\zeta}{dt} \xi_i \right) = 0, \\ \mu_\zeta = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(\frac{d\eta_i}{dt} \xi_i - \frac{d\xi_i}{dt} \eta_i \right) = 0. \end{array} \right\} \quad (11''')$$

(*) (Voyez aussi HELMERT, *op. et lib. cit.*, p. 408). Ce qui ne se présente évidemment presque jamais.

(**) Le système est supposé ne pouvoir se déformer que d'une seule manière ; en d'autres termes, il est *à liaisons complètes*.

Le système formé des $3n - 3$ équations (l) et des 3 équations $(11''')$ permet d'obtenir les $3n$ équations $(1')$.

Au lieu de donner ψ, θ, φ en fonction du temps par des équations telles que

$$\left\{\begin{array}{l} \psi = \varphi_1(t), \\ \theta = \varphi_2(t), \\ \varphi = \varphi_3(t), \end{array}\right\} \quad (2)$$

nous n'avons qu'à exprimer que les axes $Oxyz$ sont principaux d'inertie à chaque instant, soit

$$\left\{\begin{array}{l} D = \Sigma m_i y_i z_i = 0, \\ E = \Sigma m_i z_i x_i = 0, \\ F = \Sigma m_i x_i y_i = 0. \end{array}\right\} \quad (i)$$

En remplaçant dans ces équations x_i, y_i, z_i en fonction de ξ_i, η_i, ζ_i, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' et en désignant par A′, B′, C′, D′, E′, F′ les moments et produits d'inertie du corps par rapport aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$

$$\left\{\begin{array}{ll} A' = \Sigma m_i(\eta_i^2 + \zeta_i^2), & D' = \Sigma m_i \eta_i \zeta_i, \\ B' = \Sigma m_i(\zeta_i^2 + \xi_i^2), & E' = \Sigma m_i \zeta_i \xi_i, \\ C' = \Sigma m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2), & F' = \Sigma m_i \xi_i \eta_i, \end{array}\right\}$$

nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{c} D = \Sigma_i m_i \{\Sigma_3(\alpha'\xi_i) \,.\, \Sigma_3(\alpha''\xi_i)\} \\ = \Sigma_3\{\alpha'\alpha'' \,.\, \Sigma_i m_i \xi_i^2\} + \Sigma_3\{(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') \,.\, \Sigma_i m_i \eta_i \zeta_i\} \\ = -\Sigma_3\{(\beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') \,.\, \Sigma_i m_i \xi_i^2\} + \Sigma_3\{(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') \,.\, \Sigma_i m_i \eta_i \zeta_i\} \\ = -\Sigma_3\{\alpha'\alpha'' \,.\, A'\} + \Sigma_3\{(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') \, D'\} = 0, \end{array}\right\} \quad (p)$$

et de même

$$\left\{\begin{array}{l} E = -\Sigma_3\{\alpha''\alpha \,.\, A'\} + \Sigma_3\{(\beta''\gamma + \beta\gamma'') \, D'\} = 0, \\ F = -\Sigma_3\{\alpha\alpha' \;\; A'\} + \Sigma_3\{(\beta\gamma' + \beta'\gamma) \, D'\} = 0. \end{array}\right.$$

Comme nous venons de déterminer ξ_i, η_i, ζ_i en fonction du temps et, par conséquent, les valeurs de A′, B′, C′, D′, E′, F′ en fonction du temps, nous avons actuellement un système de 9 équations, formé des 3 équations (p) et des 6 relations de condition :

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \\ \alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' = 0, \\ \alpha''\beta'' + \beta''\gamma'' + \gamma''\alpha'' = 0, \end{array}\right\}$$

qui nous permettra de trouver les valeurs des 9 cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' en fonction du temps et, par conséquent, aussi les valeurs des coordonnées

$$\left\{\begin{array}{l} x_i = \alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i, \\ y_i = \alpha'\xi_i + \beta'\eta_i + \gamma'\zeta_i, \\ z_i = \alpha''\xi_i + \beta''\eta_i + \gamma''\zeta_i, \end{array}\right\}$$

en fonction du temps. Nous voyons ainsi que le problème est posé de la même façon que précédemment.

Il est clair que, dans les applications relatives à la rotation de la Terre, les choses ne se présentent pas avec un tel degré de complication.

§ 3. — *Remarques relatives à l'application de la théorie à la rotation de la Terre.*

Dans ce paragraphe nous supposerons que la Terre se compose d'une charpente rigide par rapport à laquelle se déplacent quelques masses très petites (*), et nous nous bornerons au cas de la rota-

(*) Vis-à-vis de la masse M de la charpente rigide.

tion naturelle ($L = M = N = 0$) [dans lequel les forces extérieures se ramènent à une résultante unique, qui peut être nulle, passant par le centre de gravité G de la Terre, autour duquel cette dernière effectue sa rotation].

Soient : G le centre de gravité de l'ensemble (charpente rigide + petites masses mobiles); Gx, Gy, Gz les axes principaux d'inertie de cet ensemble par rapport à G (*), M la masse de la charpente rigide, $M + \Sigma m$ celle de l'ensemble; O le centre de gravité de la charpente; Ox', Oy', Oz' les axes principaux de cette charpente par rapport à O ; λ, μ, ν les coordonnées de O par rapport aux axes Gx, Gy, Gz ; $\overline{o}$ la rotation instantanée du trièdre $Gxyz$ autour de G et p, q, r ses projections sur Gx, Gy, Gz ; $\overline{o'}$ la rotation instantanée du trièdre $Ox'y'z'$ autour de O et p', q', r' ses projections sur Ox', Oy', Oz' (fig. 5).

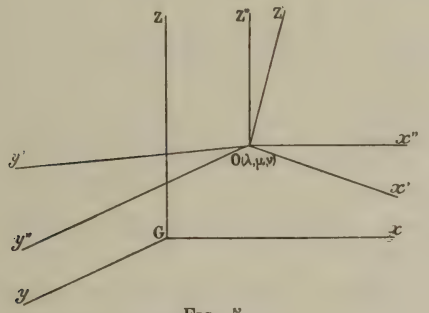


Fig. 5.

Nous allons démontrer, avec L. Picart (**), que, dans la recherche de la position des axes de référence $Gxyz$ à un instant quelconque, on peut négliger le déplacement $\overline{OG}$ du centre de gravité du à l'intervention des petites masses ; que, en d'autres termes, *on peut toujours prendre, sans erreur sensible, pour*

(*) Il n'est pas nécessaire ici de faire choix de deux systèmes différents $Gxyz$, $G\xi\eta\zeta$ d'axes mobiles de même origine G; aussi supposons-nous $Gxyz$, $G\xi\eta\zeta$ coïncidents.

(**) *Op. cit.*, 1897, § 12.

point fixe (autour duquel on suppose le mouvement se produire) le centre de gravité O *de la partie solide.*

Pour cela nous comparerons le mouvement de deux trièdres de référence : d'une part le trièdre $Gxyz$ que nous venons de définir, d'autre part le trièdre $Ox''y''z''$ formé par les parallèles, menées par O, aux positions instantanées des axes Gx, Gy, Gz.

Si nous désignons par f, g, h et f'', g'', h'' les moments résultants, par rapport aux axes Gx, Gy, Gz et Ox'', Oy'', Oz'', des quantités de mouvement absolu de l'ensemble et si nous remarquons que la rotation instantanée de $Ox''y''z''$ autour de O est encore $\overline{o}$ (de composantes p, q, r suivant Ox'', Oy'', Oz''), les équations du mouvement seront, d'après les équations générales (16) du § 1,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df}{dt} + qh - rg = 0, \\ \dfrac{dg}{dt} + rf - ph = 0, \\ \dfrac{dh}{dt} + pg - qf = 0, \end{array}\right\} \quad (16'), \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \dfrac{df''}{dt} + qh'' - rg'' = 0, \\ \dfrac{dg''}{dt} + rf'' - ph'' = 0, \\ \dfrac{dh''}{dt} + pg'' - qf'' = 0, \end{array}\right\} \quad (16'')$$

suivant que nous chercherons le mouvement du trièdre $Gxyz$ ou du trièdre $Ox''y''z''$.

Notre démonstration consistera à prouver que *les différences* $f - f''$, $g - g''$, $h - h''$ *sont négligeables*, en sorte que l'on puisse remplacer les équations (16′) par les équations (16″).

Pour cela il convient d'introduire le trièdre auxiliaire $Ox'y'z'$ défini précédemment.

Soient

	Ox'	Oy'	Oz'
Gx	α_1	β_1	γ_1
Gy	α_1'	β_1'	γ_1'
Gz	α_1''	β_1''	γ_1''

les cosinus directeurs des axes Ox', Oy', Oz' par rapport aux

axes Gx, Gy, Gz. et A_0, B_0, C_0 les moments d'inertie principaux (par rapport à Ox',Oy',Oz') de la charpente solide.

Le moment résultant f (des quantités de mouvement) par rapport à l'axe Gx est la somme $f_1 + f_2$:

$$f = f_1 + f_2$$

des moments résultants f_1 et f_2, par rapport au même axe, des quantités de mouvement de la charpente rigide et des petites masses.

Calculons f_1 et f_2.

Le moment f_1 par rapport à Gx est égal au moment f_1' de la même quantité de mouvement par rapport à l'axe parallèle Ox'', augmenté de celui F_1 (par rapport à Gx) de la quantité de mouvement de la masse totale M de la charpente supposée concentrée au point O (*) :

$$f_1 = f_1' + F_1.$$

Or le moment f_1' lui-même est égal à la projection sur Ox'' du moment résultant géométrique des quantités de mouvement de la charpente, et ce dernier a évidemment pour composantes suivant Ox', Oy', Oz' les moments

$$\begin{cases} A_0 p', \\ B_0 q', \\ C_0 r'. \end{cases}$$

Donc

$$f_1' = \alpha_1 . A_0 p' + \beta_1 . B_0 q' + \gamma_1 . C_0 r'.$$

De plus

$$F_1 = M \left(\mu \frac{d\nu}{dt} - \nu \frac{d\mu}{dt} \right).$$

(*) D'après un théorème bien connu. Voyez, par exemple, P. APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. II, 2me éd., 1904, p. 36.

Par suite

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 . A_0 p' + \beta_1 . B_0 q' + \gamma_1 . C_0 r' \\ &\quad + M\left(\mu \frac{d\nu}{dt} - \nu \frac{d\mu}{dt}\right), \\ &\text{et de même} \\ g_1 &= \alpha_1' . A_0 p' + \beta_1' . B_0 q' + \gamma_1' . C_0 r' \\ &\quad + M\left(\nu \frac{d\lambda}{dt} - \lambda \frac{d\nu}{dt}\right), \\ h_1 &= \alpha_1'' . A_0 p' + \beta_1'' . B_0 q' + \gamma_1'' . C_0 r' \\ &\quad + M\left(\lambda \frac{d\mu}{dt} - \mu \frac{d\lambda}{dt}\right), \end{aligned}\right.$$

pour les axes Gy, Gz.

Le moment résultant f_2 des petites masses sera

$$f_2 = \Sigma m\ (v_z y - v_y z),$$

v_y, v_z désignant les projections sur Gy, Gz de la vitesse absolue $\overline{v}$ de l'une des petites masses m. Ces projections sont évidemment

$$\left\{\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} + rx - pz, \\ v_z &= \frac{dz}{dt} + py - qx. \end{aligned}\right.$$

Donc

$$\left\{\begin{aligned} f_2 &= \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) + p . \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - \Sigma mx(px + qy + rz), \\ &\text{et de même} \\ g_2 &= \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right) + q . \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - \Sigma my(px + qy + rz), \\ h_2 &= \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) + r . \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - \Sigma mz(px + qy + rz). \end{aligned}\right.$$

Par suite

$$\left\{\begin{array}{l} f=f_1+f_2=\alpha_1 . A_0 p'+\beta_1 . B_0 y'+\gamma_1 . C_0 r'+\mathrm{M}\left(\mu\dfrac{d\nu}{dt}-\nu\dfrac{d\mu}{dt}\right) \\ \qquad\qquad +\ \Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)+p\,.\,\Sigma m(x^2+y^2+z^2) \\ \qquad -\Sigma mx(px+qy+rz), \\ g=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Calculons d'autre part le moment résultant f'' des quantités de mouvement de l'ensemble par rapport à Ox''. Ce moment est la somme

$$f''=f_1''+f_2''$$

du moment f_1' que nous venons de définir et du moment résultant f_2'' des quantités de mouvement des petites masses par rapport à l'axe Ox''. Ce dernier est

$$f_2''=\Sigma m(v_z''y''-v_y''z''),$$

y'', z'' et v_y'', v_z'' désignant les coordonnées et les composantes de la vitesse absolue $\overline{v}$ d'une des petites masses suivant les axes Oy'', Oz''.

On

$$y''=y-\mu, \qquad z''=z-\nu.$$

Par suite f_2'' aura la même expression que f_2, avec cette différence cependant que x, y et z seront remplacées par $x-\lambda$, $y-\mu$, $z-\nu$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{c} f_2''=\Sigma m\left[(y-\mu)\dfrac{d(z-\nu)}{dt}-(z-\nu)\dfrac{d(y-\mu)}{dt}\right] \\ +\ p\,.\,\Sigma m\left[(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2\right] \\ -\ \Sigma m(x-\lambda)\left[p(x-\lambda)+q(y-\mu)+r(z-\nu)\right], \end{array}$$

et de même g_2'', h_2''.

Donc

$$\left\{\begin{array}{l} f'' = f_1' + f_2'' = \alpha_1 \cdot A_0 p' + \beta_1 \cdot B_0 q' + \gamma_1 \cdot C_0 r' \\ \quad + \Sigma m\left[(y-\mu)\dfrac{d(z-\nu)}{dt} - (z-\nu)\dfrac{d(y-\mu)}{dt}\right] \\ \quad + p \cdot \Sigma m[(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2] \\ \quad - \Sigma m(x-\lambda)\,[p(x-\lambda) + q(y-\mu) + r(z-\nu)], \\ g'' = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h'' = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} (\beta)$$

G étant, par définition, le centre de gravité de l'ensemble et ayant par rapport aux axes Ox'', Oy'', Oz'' les coordonnées $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, nous aurons les relations de condition :

$$\left\{\begin{array}{ll} (M+\Sigma m)\lambda = \Sigma m x'' = \Sigma m(x-\lambda), & \text{soit : } M\lambda + \Sigma m x = 0, \\ \text{et de même :} & M\mu + \Sigma m y = 0, \\ & M\nu + \Sigma m z = 0. \end{array}\right\} (\gamma)$$

Si nous formons maintenant les différences $f'' - f$, $g'' - g$, $h'' - h$ au moyen des expressions (α) et (β) et si nous tenons compte des relations (γ), nous obtenons, après quelques réductions,

$$\left\{\begin{array}{l} f'' - f = (M+\Sigma m)\left(\mu\dfrac{d\nu}{dt} - \nu\dfrac{d\mu}{dt}\right) + (2M+\Sigma m)\,p\,(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) \\ \qquad\qquad - (2M+\Sigma m)\,\lambda(p\lambda + q\mu + r\nu), \\ g'' - g = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h'' - h = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}$$

Puisque la somme Σm des masses mobiles est très petite vis-à-vis de la masse M de la partie solide, les coordonnées λ, μ, ν du centre de gravité O de cette dernière par rapport aux axes Gx, Gy, Gz sont évidemment très petites. On peut donc négliger les carrés et les produits deux à deux de ces quantités. Par suite les différences $f'' - f$, $g'' - g$, $h'' - h$ sont elles-mêmes négligeables, et *dans les équations* (16′) *du mouvement, on pourra prendre* $f = f''$, $g = g''$, $h = h''$, c'est-à-dire écrire les équations

(16″) : en d'autres termes, *on pourra supposer que le centre de gravité réel* G *de l'ensemble coïncide avec le centre de gravité* O *de la partie solide*, ce qu'il s'agissait précisément d'établir.

Dans ce qui suit, nous prendrons toujours pour *point fixe* (origine des axes) le centre de gravité O de la partie rigide du globe (si ce dernier est supposé en posséder une).

*
* *

Ayant pris ce centre O pour origine des axes, choisissons pour axes $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$ (coïncidents) les axes principaux d'inertie de l'ensemble formé par la charpente rigide et les petites masses. Nous aurons à poser dans les équations (D) du paragraphe précédent

$$L = M = N = 0,$$

ce qui nous donne pour équations du mouvement (*) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(\sigma_x + Ap) + q(\sigma_z + Cr) - r(\sigma_y + Bq) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right\} (D')$$

A, B, C désignant comme d'habitude les moments principaux d'inertie instantanés de l'ensemble et σ_x, σ_y, σ_z les projections du moment résultant $\overline{O\sigma}$ des quantités de mouvement relatif des petites masses m.

Représentons par A_0, B_0, C_0 les moments principaux (constants) de la charpente rigide, et supposons que l'on puisse écrire (**) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = A_0 + KA_1, \\ B = B_0 + KB_1, \\ C = C_0 + KC_1, \\ \sigma_x = K\sigma_1, \\ \sigma_y = K\sigma_2, \\ \sigma_z = K\sigma_3, \end{array} \right\} (h)$$

(*) En effet, $A = A$, $B = B$, $C = C$, $D = E = F = 0$, $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, $r = \omega_z$.

(**) Il est clair que les conclusions qui vont suivre sont encore valides si le globe ne posssède pas *une partie rigide*, au sens propre du mot, pourvu que sa déformation reste petite et qu'on puisse toujours lui appliquer les conditions (h).

A_1, B_1, C_1, σ_1, σ_2, σ_3 étant des fonctions du temps périodiques admettant la même période et K une quantité *très petite* du même ordre que les masses mobiles m.

Nous nous proposons de montrer que, *dans cette hypothèse*, l'axe de rotation OI de la Terre ne peut pas, en restant au voisinage de l'axe principal OC (ou Oz), tourner *périodiquement* autour de lui (*), à moins que A_1, B_1, C_1, σ_1, σ_2, σ_3 ne possèdent simultanément la période eulérienne. Remarquons tout d'abord que l'extrémité du vecteur « rotation $\overline{o}$ » a pour coordonnées, vis-à-vis de $Oxyz$, les composantes p, q, r.

Les équations (D') deviennent, si l'on introduit l'hypothèse (h),

$$\left.\begin{array}{c} A_0\dfrac{dp}{dt}+(C_0-B_0)rq \\ +\mathrm{K}\left[A_1\dfrac{dp}{dt}+(C_1-B_1)rq+p\dfrac{dA_1}{dt}+(q\sigma_3-r\sigma_2)+\dfrac{d\sigma_1}{dt}\right]=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (\mathrm{D}'')$$

D'après cela, si les six fonctions A_1, B_1, C_1, σ_1, σ_2, σ_3 sont périodiques et admettent *simultanément* la même période ϖ, p, q, r et $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ admettent aussi cette période. Supposons donc qu'il en soit ainsi. Les équations (D'') possèdent alors une solution périodique (de période ϖ) pour une valeur de K bien déterminée; mais la période ϖ est évidemment *indépendante de la valeur de* K.

Nous allons montrer que, si p, q, r admettent une période, cette période ne peut être que ϖ, et cela en nous basant sur les célèbres recherches de H. Poincaré relatives aux *solutions périodiques* (**).

Soient p_0, q_0, $n + r_0$ les valeurs initiales des composantes p, q, r correspondant à la solution périodique : n est une constante

---

(*) L. Picart, *op. cit.*, § 10. Il s'agit de montrer ici que le mouvement de OI autour de OC ne peut plus être *simplement périodique*, et non pas de prouver qu'il ne peut pas être la résultante de plusieurs mouvements composants ayant des périodes différentes. [Voyez Troisième partie].

(**) Voyez *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, 1892, chap. II et III.

donnée à l'avance et p_0, q_0, r_0 sont des constantes très petites (ce qui est le cas pour la Terre). Soient aussi $p_0 + \varepsilon_1$, $q_0 + \varepsilon_2$, $n + r_0 + \varepsilon_3$ les valeurs que prennent p, q, r pour $t = \varpi$.

Les fonctions ε_1, ε_2, ε_3 de p_0, q_0, r_0 et K étant holomorphes par rapport à ces quantités, on traduira que la solution est périodique en écrivant (*)

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_3 = 0$$

Pour chaque valeur de K, il y aura une solution périodique et *une seule*, à condition que le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{\partial(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{\partial(p_0, q_0, r_0)}$$

ne soit pas nul (**). Or il est clair que ce déterminant Δ est holomorphe en K : alors, s'il n'est pas nul pour $K = 0$, il ne sera pas nul pour des valeurs très petites de K. Par conséquent la solution périodique, qui correspond à une valeur très petite de K, devra, si l'on fait décroître K vers zéro, tendre à s'identifier avec la solution périodique qui correspond à $K = 0$. Mais nous venons de dire que la période de la solution périodique, correspondant à une valeur de K bien déterminée, est indépendante de K. Par conséquent la période de la solution périodique pour K très petit n'est autre que celle correspondant à $K = 0$.

Or nous avons vu dans l'Introduction que pour le cas d'un globe solide ($K = 0$) de révolution ($A_0 = B_0$. C_0) (***), la période de p, q est

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{C_0 - A_0}{A_0} n\right|} = 305 \text{ jours sidéraux.}$$

Donc la période de p, q, pour K très petit et non nul, ne peut être que la période eulérienne T.

(*) H Poincaré, *op.* et *lib. cit.*, p. 82.

(**) H. Poincaré, *op.* et *lib. cit.*, p 83

(***) Seul cas qui nous intéresse ici.

Par hypothèse A_1, B_1, C_1, σ_1, σ_2, σ_3 admettent la période ϖ, et il s'ensuit que p, q admettent aussi cette période ϖ. Par suite il est nécessaire que les périodes ϖ, T soient identiques.

Ainsi *il ne peut exister de solution périodique que si la période des moments d'inertie et des moments des quantités de mouvement relatif admettent la période eulérienne.*

Remarque. — Nous avons supposé que Δ n'était pas nul quand on faisait $K = 0$. Calculons l'expression de ce déterminant, lorsqu'on annule non seulement K, mais encore les constantes p_0, q_0, r_0

Si nous écrivons les équations (D'') sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} = P, \\ \dfrac{dq}{dt} = Q, \\ \dfrac{dr}{dt} = R, \end{array}\right\} \quad (D''')$$

et si nous désignons par δ_1, δ_2, δ_3 les racine de l'équation en δ :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial p} - \delta & \dfrac{\partial P}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial r} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial p} & \dfrac{\partial Q}{\partial q} - \delta & \dfrac{\partial Q}{\partial r} \\ \dfrac{\partial R}{\partial p} & \dfrac{\partial R}{\partial q} & \dfrac{\partial R}{\partial r} - \delta \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle nous avons fait $K = 0$, $p = q = 0$, $r = n$ pour le calcul des dérivées partielles, cette expression sera (*)

$$\Delta = (e^{\delta_1 \varpi} - 1)(e^{\delta_2 \varpi} - 1)(e^{\delta_3 \varpi} - 1).$$

(*) H. Poincaré, *op.* et *lib. cit.*, pp. 157 et 158. Pour la démonstration, voir E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 1896, p. 181.

L'équation en δ est ici

$$\begin{vmatrix} -\delta & -\dfrac{C_0 - A_0}{A_0} n & 0 \\ \dfrac{C_0 - A_0}{A_0} n & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{vmatrix} = 0.$$

Par suite ses racines sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = 0, \\ \delta_2 = +i\dfrac{C_0 - A_0}{A_0} n, \\ \delta_3 = -i\dfrac{C_0 - A_0}{A_0} n. \end{array} \right\}$$

Comme Δ est supposé nul,

$$\Delta = 0,$$

la valeur de ϖ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_2 \varpi = 2\pi i, \\ \delta_3 \varpi = 2\pi i, \end{array} \right\}$$

ou encore par

$$\varpi = \frac{2\pi}{\left| \dfrac{C_0 - A_0}{A_0} n \right|},$$

ce qui est précisément l'expression de T donnée ci-dessus.

Ainsi donc il est démontré que, dans l'hypothèse (*h*), *il ne peut exister de solution périodique que si* A, B, C, σ_x, σ_y, σ_z, *admettent la période eulérienne*, c'est-à-dire si les petites masses m se

déplacent de telle façon que les moments principaux d'inertie et les moments relatifs possèdent cette période (*).

Il est clair que les déplacements de masses qui se produisent dans ou sur la Terre ne possèdent pas *tous* cette période. L'existence de tels mouvements non périodiques ou périodiques *non eulériens* (**) a pour effet d'empêcher la simple périodicité de p, q, c'est-à-dire *d'empêcher que le pôle de rotation I ne décrive autour du pôle d'inertie* C *une courbe fermée monopériodique.*

Cette conclusion est conforme aux résultats d'observation (***).

Il nous reste à montrer que, *si les équations* (D'') *n'admettent pas en général de solution simplement périodique où* p, q *demeurent très petites, ces composantes* p, q *restent cependant minimes, et que* r *ne s'écarte que très peu de sa valeur initiale* $n + r_0 = r'_0$, pourvu que les valeurs initiales p_0, q_0 soient aussi très petites.

En effet la solution générale des équations (D'') est

$$\left\{\begin{array}{l} p = F_1(p_0, q_0, r'_0, K, t), \\ q = F_2(p_0, q_0, r'_0, K, t), \\ r = F_3(p_0, q_0, r'_0, K, t), \end{array}\right\} \quad (a)$$

avec K très petit ; F_1, F_2, F_3 sont des fonctions holomorphes de K.

Si l'on développe ces fonctions, au moyen de la série de Mac Laurin, suivant les puissances croissantes de K, on aura :

$$\left\{\begin{array}{l} p = F_1(p_0, q_0, r'_0, 0, t) + K \cdot \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial K}\right)_{K=0} + \dfrac{K^2}{2} \cdot \left(\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial K^2}\right)_{K=0} + \ldots \\ q = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (b)$$

Remarquons que les fonctions $F_1(p_0, q_0, r'_0, 0, t)$, $F_2(p_0, q_0,$

(*) On pourrait encore discuter l'existence d'une solution périodique, mais nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet.

(**) C'est-à-dire n'admettant pas la période eulérienne.

(***) Voyez la Première partie.

$r'_0, 0, t)$, $F_3(p_0, q_0, r'_0, 0, t)$ sont précisément les solutions des équations d'Euler :

$$\left\{\begin{array}{l} A_0\dfrac{dp}{dt} + (C_0 - B_0)rq = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (B')$$

[obtenues en faisant $K = 0$ dans les équations (D'')] correspondant aux valeurs initiales p_0, q_0, r'_0 de p, q, r. De plus on sait (*) que, si les valeurs initiales p_0, q_0 des équations (B') sont très petites (**), les composantes p, q restent très petites et que r demeure très voisin de r'_0, puisque la rotation autour d'un axe très voisin de Oz est *stable*. Par conséquent, on est certain que les quantités $F_1(p_0, q_0, r'_0, 0, t)$, $F_2(p_0, q_0, r'_0, 0, t)$ resteront aussi très petites et que $F_3(p_0, q_0, r'_0, 0, t)$ ne s'écartera que très peu de r'_0.

Comme K est lui-même supposé très petit, on pourra enfin conclure, d'après les développements (b), que p, q demeureront très petits et que r restera toujours très voisin de sa valeur initiale r'_0.

Ainsi nous sommes assurés que *le pôle de rotation I restera toujours très proche du pôle d'inertie* (z *ou*) C *de l'ensemble*.

Les théorèmes que nous venons de démontrer sont encore dus à L. Picart (***).

(*) Voyez par exemple Bour, *Dynamique*, p. 165 ; P. Appell, *op.* et *lib. cit*, p. 178.

(**) Ce qui est le cas pour la Terre.

(***) *Op. cit.*, 1897, §§ 10 et 11. Les conclusions seraient encore valides pour un globe pourvu d'une certaine élasticité, au sens indiqué dans la Deuxième partie. Au lieu de période eulérienne il serait question alors de *période chandlérienne*.

B. — Influence des mouvements internes sur le déplacement du pôle.

Supposons encore que la Terre se compose d'une charpente rigide et de petites masses m se déplaçant par rapport à cette charpente. Quelle sera l'influence du mouvement relatif de ces petites masses sur la rotation de la charpente, qui entraîne du reste ces masses avec elle?

Nous pouvons distinguer deux espèces de conséquences. Tout d'abord le moment résultant total $\overline{OG}$ des quantités de mouvement absolu doit être constant, puisqu'il s'agit ici de rotation naturelle; donc

$$\overline{OG} = \text{const. géom.} = \overline{G}.$$

Or ce moment se compose de celui $\overline{OG'}$ de la charpente rigide et du moment résultant $\overline{OG''}$ des quantités de mouvement absolu des petites masses m :

$$\overline{OG} = \overline{OG'} + \overline{OG''} = G.$$

Si nous désignons par A_0, B_0, C_0 les moments *principaux* d'inertie de la charpente solide, si nous prenons les axes correspondants pour axes $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$ (coïncidents), $\overline{OG'}$ aura pour composantes suivant Ox, Oy, Oz :

$$\left\{ \begin{array}{l} f' = A_0 p, \\ g' = B_0 q, \\ h' = C_0 r, \end{array} \right\} \quad (1)$$

p, q, r représentant toujours les composantes de la rotation $\overline{o}$ du trièdre $Oxyz$, suivant les arêtes-axes Ox, Oy, Oz de ce trièdre.

La vitesse absolue d'une particule m a pour composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = w_x + qz - ry, \\ v_y = w_y + rx - pz, \\ v_z = w_z + py - qx, \end{array} \right\}$$

où w_x, w_y, w_z représentent les composantes de la vitesse relative et x, y, z les coordonnées de m.

Le moment résultant $\overline{OG''}$ des quantités de mouvement absolu des différentes particules aura pour projections sur Ox, Oy, Oz :

$$\left\{\begin{array}{l} f'' = \Sigma m[(w_z + py - qx)y - (w + rx - pz)z] \\ \quad = \Sigma m(w_z y - w_y z) + p\,.\,\Sigma m(y^2 + z^2) \\ \quad - q\,.\,\Sigma myz - r\,.\,\Sigma mzx, \\ g'' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h'' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

ou, en désignant par

$$\left\{\begin{array}{ll} A_1 = \Sigma m(y^2 + z^2), & D_1 = \Sigma myz, \\ B_1 = \Sigma m(z^2 + x^2), & E_1 = \Sigma mzx, \\ C_1 = \Sigma m(x^2 + y^2), & F_1 = \Sigma mxy, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_x = \Sigma m(w_z y - w_y z), \\ \sigma_y = \Sigma m(w_x z - w_z x), \\ \sigma_z = \Sigma m(w_y x - w_x y), \end{array}\right.$$

les moments d'inertie, produits d'inertie et moments des quantités de mouvement relatif des petites masses :

$$\left\{\begin{array}{l} f'' = \sigma_x + A_1 p - F_1 q - E_1 r, \\ \text{et de même} \\ g'' = \sigma_y - F_1 p + B_1 q - D_1 r, \\ h'' = \sigma_z - E_1 p - D_1 q + C_1 r. \end{array}\right. \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), nous aurons pour composantes suivant Ox, Oy, Oz du moment résultant total $\overline{OG}$ constant des quantités de mouvement absolu :

$$\left\{\begin{array}{l} f = f' + f'' = \sigma_x + (A_0 + A_1)\,p - F_1 q - E_1 r, \\ g = g' + g'' = \sigma_y - F_1 p + (B_0 + B_1)\,q - D_1 r, \\ h = h' + h'' = \sigma_z - E_1 p - D_1 q + (C_0 + C_1)r. \end{array}\right. \quad (3)$$

Imaginons que le mouvement des petites masses ait lieu de telle manière que les moments et produits d'inertie restent constants : cela se produit quand les mouvements sont *cycliques*, c'est-à-dire quand une particule m, quittant une position, est remplacée immédiatement par une autre de même masse. Alors

$$\left\{\begin{array}{llll} A_1 = c^{te}, & B_1 = c^{te}, & C_1 = c^{te} \\ D_1 = c^{te}, & E_1 = c^{te}, & F_1 = c^{te} \end{array}\right\}$$

et si nous désignons par

$$\left\{\begin{array}{ll} A = A_0 + A_1 = c^{te}, & D = D_1 = c^{te}, \\ B = B_0 + B_1 = c^{te}, & E = E_1 = c^{te}, \\ C = C_0 + C_1 = c^{te}, & F = F_1 = c^{te}, \end{array}\right\}$$

les moments et produits d'inertie de l'ensemble, les expressions (3) de f, g, h deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} f = \sigma_x + Ap - Fq - Er, \\ g = \sigma_y - Fp + Bq - Dr, \\ h = \sigma_z - Ep - Dq + Cr. \end{array}\right\} \quad (4)$$

elles expriment que

$$\overline{OG} = \overline{O\sigma} + \overline{OG_1'},$$

$\overline{OG_1'}$ étant le moment de la quantité de mouvement d'entraînement de l'ensemble (charpente + masse).

On a donc

$$\overline{O\sigma} + \overline{OG_1'} = C^{te}\ \text{géom.} \equiv \overline{G}.$$

Ainsi *la seule influence des mouvements cycliques est d'introduire un moment de quantité de mouvement relatif* $\overline{O\sigma}$, et de diminuer ainsi le moment de la quantité de mouvement d'entraînement

$$\overline{OG_1'} = \overline{G} - \overline{O\sigma}.$$

Mais des mouvements internes qui introduisent des variations dans les moments et produits d'inertie de l'ensemble, ont en outre un autre effet : le moment $\overline{OG'_1}$ qui a pour composantes

$$\left\{\begin{array}{l} f'_1 = \quad (A_0 + A_1)\,p - F_1 q - E_1 r, \\ g'_1 = -F_1 p + (B_0 + B_1)\,q - D_1 r, \\ h'_1 = -E_1 p - D_1 q + (C_0 + C_1) r, \end{array}\right. \qquad (5)$$

est encore modifié *en lui-même* par les variations de A_1 B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. Les axes principaux de l'ensemble à l'instant $t + \Delta t$ ne coïncident plus avec ceux de l'instant t. On conçoit que la position de l'axe instantané en subira le contrecoup.

Nous dresserons donc le Tableau suivant :

Causes	Effets
Mouvements de masses ne changeant pas les moments ni les produits d'inertie.	Introduction d'un moment relatif $\overline{O\sigma}$ qui change les lois du mouvement.
Mouvements de masses introduisant des variations dans les moments et produits d'inertie.	1) Introduction d'un moment relatif $\overline{O\sigma}$. 2) Variation des axes principaux d'inertie, qui changent toutes deux les lois du mouvement.

La première influence (introduction de $O\sigma$) sera nommée *influence directe;* la seconde *influence indirecte*, suivant les désignations de Sommerfeld (*).

Nous calculerons leurs effets.

Pour l'influence directe, nous étudierons les mouvements cycliques (litt. *a*).

Dans l'examen des cas de seconde espèce, nous considérerons

(*) *Op.* et *lib. cit.*, pp. 707, 708. Nous ne voulons pas discuter ici le point de savoir si ces appellations conviennent parfaitement aux influences qu'elles veulent désigner.

d'abord l'influence indirecte ; nous apprendrons à calculer le déplacement des axes principaux d'inertie et nous étudierons les rapports qui relient la position de l'axe instantané de rotation à ces axes d'inertie : nous pourrons alors déterminer l'influence indirecte des transports de masses sur la position du pôle à la surface de la Terre. Nous montrerons, pour terminer, que l'influence directe de ces transports de masses est négligeable vis-à-vis de leur influence indirecte (litt. *b*). Enfin, dans une dernière division du même littera *b*, nous étudierons quelques cas particuliers assez simples au moyen desquels nous déterminerons le genre des phénomènes qui peuvent avoir une influence indirecte sensible.

a) **Influence directe.**

Comme nous venons de le dire, nous n'examinerons ici que celle des ***mouvements cycliques.***

Soit donc le système formé par la charpente rigide du globe et par certains ***anneaux*** de matière tournants, situés à l'extérieur ou à l'intérieur de cette charpente. Appelons A, B, C les moments principaux d'inertie ***constants*** de l'ensemble.

Prenons pour axes de référence $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$ (coïncidents) les axes principaux de l'ensemble, ***fixes par rapport à la charpente.***

Nous aurons alors :

$$A = A = c^{te},\ B = B = c^{te},\ C = C = c^{te},\ D = E = F = 0,\ p = \omega_x,\ q = \omega_y,\ r = \omega_z$$

et les équations différentielles du mouvement prendront la forme (F) indiquée ci-dessus :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\sigma_x}{dt} + A\dfrac{dp}{dt} + (q\sigma_z - r\sigma_y) + (C - B)\,rq = L = 0, \\ \dfrac{d\sigma_y}{dt} + B\dfrac{dq}{dt} + (r\sigma_x - p\sigma_z) + (A - C)\,pr = M = 0, \\ \dfrac{d\sigma_z}{dt} + C\dfrac{dr}{dt} + (p\sigma_y - q\sigma_x) + (B - A)\,qp = N = 0. \end{array}\right\} \quad (F')$$

Supposons encore que l'ellipsoïde d'inertie de l'ensemble au point O soit de révolution ; alors $B = A$, et il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \dfrac{C-A}{A} rq + \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{d\sigma_x}{dt} + q\sigma_z - r\sigma_y\right) = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \dfrac{C-A}{A} rp + \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{d\sigma_y}{dt} + r\sigma_x - p\sigma_z\right) = 0, \\ \dfrac{dr}{dt} + \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{d\sigma_z}{dt} + p\sigma_y - q\sigma_x\right) = 0. \end{array}\right\} \quad (F'')$$

σ_x, σ_y, σ_z sont des fonctions continues du temps connues, par hypothèse, et contenant les petites masses au premier degré. Si nous admettons a priori que p, q doivent être très petits, du même ordre que les m, le terme $\frac{1}{C}(p\sigma_y - q\sigma_x)$ est du second ordre ; on peut le négliger et il vient pour la troisième équation :

$$\frac{dr}{dt} + \frac{1}{C}\frac{d\sigma_z}{dt} = 0,$$

d'où

$$r = \text{c}^{\text{te}} - \frac{1}{C}\int \frac{d\sigma_z}{dt}\,dt = n - \frac{\sigma_z}{C}, \qquad (1)$$

n étant une constante finie (*). Si nous substituons cette valeur dans les deux premières équations et si nous négligeons encore les termes du second ordre en m, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \dfrac{C-A}{A} nq + \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{d\sigma_x}{dt} - n\sigma_y\right) = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \dfrac{C-A}{A} np + \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{d\sigma_y}{dt} + n\sigma_x\right) = 0. \end{array}\right\}$$

Posons $\frac{C-A}{A}\, n = \nu$ et désignons les fonctions du temps

(*) Ce serait la valeur de r s'il ne se produisait pas de mouvements cycliques.

$\frac{1}{A}\left(\frac{d\sigma_x}{dt} - n\,\sigma_y\right)$ $\frac{1}{A}\left(\frac{d\sigma_y}{dt} + n\,\sigma_x\right)$ par P et Q. En additionnant les équations après avoir multiplié la seconde par i, il vient

$$\frac{d(p + iq)}{dt} - i\nu(p + iq) + (P + iQ) = 0. \quad (2)$$

L'intégrale de cette équation pour $P = Q = 0$ est

$$p + iq = Ke^{i\nu t}, \quad (3)$$

K désignant une constante.

On peut obtenir l'intégrale de l'équation complète en employant la méthode de la *variation des constantes arbitraires*, c'est-à-dire en supposant que K est une véritable fonction du temps.

Alors en substituant la valeur (3) dans l'équation différentielle (2), il vient

$$e^{i\nu t}\frac{dK}{dt} + (P + iQ) = 0,$$

d'où

$$K = -\int (P + iQ)e^{-i\nu t}dt + K',$$

K′ étant une véritable constante. La solution prend alors la forme

$$p + iq = K'e^{i\nu t} - e^{i\nu t}\int (P + iQ)e^{-i\nu t}dt, \quad (4)$$

d'où on tire la valeur de p, q en séparant la partie réelle de l'imaginaire.

Supposons par exemple qu'il s'agisse du mouvement cyclique *uniforme* (autour d'un axe fixe dans le globe) d'un anneau de masse m ; alors

$$\sigma_x = I\omega\cos\alpha, \qquad \sigma_y = I\omega\cos\beta, \qquad \sigma_z = I\omega\cos\gamma,$$

I représentant le moment d'inertie de l'anneau par rapport à son axe de révolution, ω sa vitesse angulaire de rotation, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus directeurs de l'axe de révolution par rapport aux axes d'inertie.

Alors aussi

$$\left\{\begin{array}{l} P = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{d\sigma_x}{dt} - n\sigma_y\right) = -\dfrac{n}{A} I\omega \cos\beta = c^{te} \equiv P_0, \\ Q = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{d\sigma_y}{dt} + n\sigma_x\right) = +\dfrac{n}{A} I\omega \cos\alpha = c^{te} \equiv Q_0. \end{array}\right.$$

La valeur de K devient

$$K = K' + \left(\frac{P_0}{i\nu} + i\frac{Q_0}{i\nu}\right) e^{-i\nu t} = K' - \frac{i}{\nu}(P_0 + iQ_0)e^{-i\nu t},$$

et la solution est, par suite,

$$p + iq = K'e^{i\nu t} - \frac{i}{\nu}(P_0 + iQ_0) = K'(\cos \nu t + i \sin \nu t) - \frac{iP_0}{\nu} + \frac{Q_0}{\nu}.$$

P_0 et Q_0 étant des constantes réelles ; nous en déduisons :

$$\left\{\begin{array}{l} p = K' \cos \nu t + \dfrac{Q_0}{\nu}, \\ q = K' \sin \nu t - \dfrac{P_0}{\nu}. \end{array}\right.$$

Pour r, nous avons

$$r = n - \frac{I\omega \cos\gamma}{C} = n - R_0,$$

R_0 étant une constante réelle.

Ainsi l'influence du mouvement de l'anneau est d'introduire des termes constants dans chaque composante.

D'une façon plus générale, nous pouvons supposer, si σ_x, σ_y, σ_z sont des fonctions périodiques du temps (de période μ) :

$$P + iQ = Me^{i\mu t} + M'e^{-i\mu t}, \quad (M \text{ et } M' \text{ étant des constantes})$$

alors

$$K = K' - \left[\frac{M}{i(\mu - \nu)} e^{i(\mu-\nu)t} + \frac{M'}{-i(\mu + \nu)} e^{-i(\mu+\nu)t}\right],$$

d'où la solution

$$p + iq = \mathrm{K}' e^{i\nu t} - \frac{\mathrm{M}}{i(\mu - \nu)} e^{i\mu t} + \frac{\mathrm{M}'}{i(\mu + \nu)} e^{-i\mu t}$$
$$= \mathrm{K}' e^{i\nu t} + \frac{i\mathrm{M}}{\mu - \nu} e^{i\mu t} - \frac{i\mathrm{M}'}{\mu + \nu} e^{-i\mu t}.$$

$\mathrm{K}' e^{i\nu t}$ se rapporte évidemment au mouvement eulérien (ou chandlérien, si l'on suppose le globe légèrement élastique).

Les deux derniers termes introduisent, dans les expressions de p, q, des parties périodiques ayant la même période μ que les mouvements cycliques

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \mathrm{K}' \cos \nu t + \left[- \dfrac{\mathrm{M}}{\mu - \nu} - \dfrac{\mathrm{M}'}{\mu + \nu} \right] \sin \mu t, \\ q = \mathrm{K}' \sin \nu t + \left[+ \dfrac{\mathrm{M}}{\mu - \nu} - \dfrac{\mathrm{M}'}{\mu + \nu} \right] \cos \mu t, \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \mathrm{K}' \cos \nu t - \dfrac{\mathrm{M}'(\mu - \nu) + \mathrm{M}(\mu + \nu)}{\mu^2 - \nu^2} \sin \mu t, \\ q = \mathrm{K}' \sin \nu t + \dfrac{\mathrm{M}(\mu + \nu) - \mathrm{M}'(\mu - \nu)}{\mu^2 - \nu^2} \cos \mu t. \end{array} \right.$$

On voit immédiatement qu'il peut se présenter ici un phénomène, analogue à certains *phénomènes de résonance*, dans lequel les oscillations de période μ aient de grandes amplitudes. Si μ est très voisin de ν, les coefficients de $\sin \mu t$ et $\cos \mu t$ deviennent très grands, et les perturbations de p et q dues aux mouvements cycliques peuvent avoir une valeur notable. Nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur ce genre de phénomènes lorsque nous parlerons de la multiplication de Radau. Qu'il nous suffise de dire ici que si l'on suppose $\frac{2\pi}{\mu} = 366$ jours, $\frac{2\pi}{\nu} = 427$ jours, *l'amplitude des oscillations peut devenir sextuple de celle correspondant à un phénomène séculaire* ($\mu = 0$) (*).

(*) Voyez A. Sommerfeld, *op.* et *lib. cit.*, p. 714.

Dans un beau Mémoire (*) V. Volterra a traité à fond l'étude de l'influence de tels mouvements sur les déplacements du pôle. Il faut observer que, jusqu'à présent, on n'a pas encore découvert de phénomènes météorologiques ou géologiques de ce genre qui possèdent une intensité suffisante pour pouvoir produire les oscillations que l'on observe dans le mouvement du pôle. A vrai dire, les *courants marins* peuvent assez bien être rangés dans la catégorie des phénomènes cycliques; mais leur influence n'est pas suffisante pour amener des oscillations du pôle de quelques centièmes de seconde. Les recherches de Volterra ont donc plus d'intérêt au point de vue de l'Analyse pure que de la Géophysique.

En outre nous ferons voir, sous le litt. *b*, que, pour les phénomènes non cycliques, l'influence indirecte est de beaucoup supérieure à l'influence directe : les moments de quantités de mouvement relatif sont toujours trop faibles pour amener des perturbations appréciables dans les circonstances du mouvement.

Outre les nombreux travaux de Volterra (**) sur la question des mouvements cycliques, qu'il a résumés dans le Mémoire en question, citons également ceux de A. Wangerin (***) et E. Jahnke (IV).

b) **Influence indirecte.**

§ 1. — *Variation des axes principaux d'inertie due aux déplacements de masses.*

Pour évaluer l'influence des déplacements (non cycliques) de masses sur le mouvement du pôle de rotation, nous calculerons d'abord, dans ce paragraphe, la variation des axes principaux d'inertie qui résulte de ces déplacements. Dans le paragraphe

(*) *Sur la théorie des variations des latitudes.* (ACTA MATHEMATICA. t. XXII, 1898.)

(**) Voyez la Bibliographie.

(***) *Universitätschrift*, Halle, 1899.

(IV) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5me série, t. V, 1899.

suivant nous verrons quelle relation de position existe entre ces axes et l'axe instantané de rotation.

* * *

Avant de calculer la variation de position des axes principaux d'inertie (spécialement de l'axe polaire OC d'inertie), montrons, par un exemple, qu'il est absolument superflu de chercher une variation quelconque dans la *position du centre de gravité.* Pour prouver la légitimité de cette assertion, supposons, avec J.-V. Schiaparelli (*), que le grand plateau central de l'Asie, dont la masse est environ la cent-millième partie de celle du globe, se soulève tout entier d'une centaine de mètres: le centre de gravité de la Terre se déplacera d'une quantité cent mille fois plus petite, c'est-à-dire d'*un millimètre!* Nous négligerons donc dorénavant les déviations éventuelles du centre de gravité et nous ne nous occuperons que du changement de position des axes principaux.

Considérons le trièdre trirectangle formé par les axes principaux Ox, Oy, Oz de l'ensemble au temps t; nous appelons A, B, C les moments principaux d'inertie qui y correspondent.

A l'instant suivant $t + \Delta t$, les petites masses étant déplacées par rapport à la charpente rigide, les axes principaux d'inertie de l'ensemble ne sont plus Ox, Oy, Oz, mais bien des axes Ox', Oy', Oz' formant encore un trièdre trirectangle; nous nommons A', B', C' les moments *principaux* de l'ensemble au temps $t + \Delta t$.

Relativement au système primitif Ox, Oy, Oz, la nouvelle configuration aura les moments d'inertie $A + \delta A$, $B + \delta B$, $C + \delta C$, et les produits d'inertie δD, δE, δF.

Appelons $\overline{U}$ la rotation angulaire qui peut faire coïncider $Oxyz$ avec $Ox'y'z'$, et U_x, U_y, U_z ses composantes suivant Ox, Oy, Oz (fig. 6).

(*) *De la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques.* Saint-Pétersbourg, 1889, problème II (exemple). Voyez aussi F. Tisserand, *Mécanique céleste*, t. II, 1891, n° 206.

Considérons une droite *fixe* Δ passant par O (*) ; elle fait avec Ox, Oy, Oz des angles dont nous désignons les cosinus par a, b, c, et avec les axes (principaux à l'instant suivant) Ox', Oy', Oz' des angles dont nous appelons les cosinus $a + \delta a$, $b + \delta b$, $c + \delta c$: δa, δb, δc désignent alors les variations des cosinus des angles que fait une droite quelconque fixe Δ avec les axes principaux de l'ensemble.

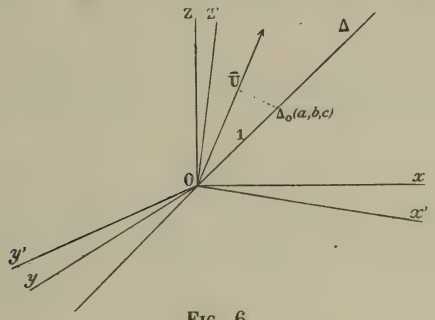


Fig. 6.

Ces variations sont celles des coordonnées a, b, c du point Δ_0 (situé sur la partie positive de Δ, à la distance + 1 de O); par suite elles sont exprimées par

$$\left\{\begin{array}{l} \delta a = U_z b - U_y c, \\ \delta b = U_x c - U_z a, \\ \delta c = U_y a - U_x b; \end{array}\right\} \quad (1)$$

en effet tout se passe comme si le trièdre des axes principaux restait fixe et que le point Δ_0 subissait la rotation $-\overline{U}$.

Evaluons de deux façons le moment d'inertie I de l'ensemble au temps $t + \Delta t$ par rapport à l'axe Δ.

Si nous le calculons au moyen des moments et produits d'inertie pris par rapport aux axes primitifs Ox, Oy, Oz, nous obtenons

$$\begin{aligned} I = {} & (A + \delta A)a^2 + (B + \delta B)b^2 + (C + \delta C)c^2 \\ & - 2\,.\,\delta D\,.\,bc - 2\,.\,\delta E\,.\,ca - 2\,.\,\delta F\,.\,ab, \end{aligned} \quad (2)$$

(*) Voyez G.-H. Darwin, *op. cit.*, 1877, § 11, et P. Schwahn, *op. cit.*, 1887, § 6.

tandis que si nous le déterminons au moyen de ses moments *principaux* A', B', C', nous avons, en négligeant les termes du second ordre,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= A'(a + \delta a)^2 + B'(b + \delta b)^2 + C'(c + \delta c)^2 \\ &= A'a^2 + B'b^2 + C'c^2 \\ &+ 2A' \,.\, a\delta a + 2B' \,.\, b\delta b + 2C' \,.\, c\delta c. \qquad (3) \end{aligned}$$

Cette dernière expression devient, si l'on introduit les valeurs (1) de δa, δb, δc,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = A'a^2 + B'b^2 + C'c^2 &- 2(C' - B')bc \,.\, \mathrm{U}_x \\ &- 2(A' - C')ca \,.\, \mathrm{U}_y \\ &- 2(B' - A')ab \,.\, \mathrm{U}_z. \qquad (4) \end{aligned}$$

Les valeurs (2) et (4) de I doivent être *identiques* quels que soient les cosinus a, b, c, c'est-à-dire quelle que soit la position initiale de Δ par rapport aux axes principaux. Cela exige que, aux termes du second ordre près, on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = A + \delta A, \\ B' = B + \delta B, \\ C' = C + \delta C, \end{array} \right\} \qquad (5)$$

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{U}_x = \dfrac{\delta D}{C' - B'} = \dfrac{\delta D}{(C - B) + (\delta C - \delta B)}, \\ \mathrm{U}_y = \dfrac{\delta E}{A' - C'} = \dfrac{\delta E}{(A - C) + (\delta A - \delta C)}, \\ \mathrm{U}_z = \dfrac{\delta F}{B' - A'} = \dfrac{\delta F}{(B - A) + (\delta B - \delta A)}. \end{array} \right\} \qquad (6)$$

Lorsqu'on peut négliger les différences $\delta C - \delta B, \ldots$, les formules (6) s'écrivent simplement :

$$\left\{\begin{array}{l} U_x = \dfrac{\delta D}{C - B}, \\ U_y = \dfrac{\delta E}{A - C}, \\ U_z = \dfrac{\delta F}{B - A}. \end{array}\right\} \quad (6')$$

Pour la Terre on pourra toujours supposer qu'on puisse écrire

$$A = B$$

au moins à un certain degré d'approximation. Dans ce cas la valeur de U_z devient illusoire (*). Mais il est clair qu'on peut prendre alors

$$\delta F = 0,$$

car tous les axes situés dans le plan xOy sont principaux d'inertie; cela donne

$$U_z = 0,$$

Le déplacement angulaire des axes principaux a donc pour composantes :

$$\left\{\begin{array}{l} U_x = \dfrac{\delta D}{C - A}, \\ U_y = -\dfrac{\delta E}{C - A}, \\ U_z = 0; \end{array}\right\} \quad (6'')$$

(*) Pour plus de détails sur les variations de position des axes principaux et sur l'ordre des différences $C - A$, $C - B$, $B - A$, consultez le *Traité de mécanique céleste*, de F. Tisserand, t. II, 1891, n° 207, et *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, de F.-R. Helmert, t. II, 1884. chap. V, pp. 419 et suiv. Voyez aussi Sommerfeld, *op.* et *lib. cit.*, p. 710.

par la déformation (mouvement des petites masses) du système, le nouvel axe polaire Oz' d'inertie s'écarte donc de l'ancien Oz de l'angle

$$\vartheta = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} = \frac{\sqrt{\delta D^2 + \delta E^2}}{C - A} \quad (7)$$

dans la direction qui a pour longitude, comptée dans le sens positif à partir de zOx, celle L donnée par

$$\operatorname{tg} L = -\frac{U_x}{U_y} = \frac{\delta D}{\delta E}. \quad (8)$$

* * *

Dans ce qui suit nous supposerons que la Terre est un ellipsoïde de révolution dont l'ellipticité est

$$\varepsilon = \frac{1}{293} = 0{,}0033439,$$

valeur déduite par le géodésien anglais A. R. Clarke (*) des mesures directes des arcs de méridien, et que sur cet ellipsoïde (rigide ou faiblement élastique) se produisent certains déplacements de masses m très petites (ne faisant pas partie de l'ellipsoïde).

Imaginons d'abord qu'en un point M d'un méridien quelconque, situé oui ou non à la surface de la Terre, vienne se placer une masse additionnelle m, que nous supposerons en premier lieu provenir de l'extérieur. Un exemple de ce cas serait donné par la chute d'un aérolithe à la surface du globe. Désignons par λ, R la latitude et la distance (au centre O de gravité de la Terre) du point M. Si, pour simplifier, nous prenons le méridien comme plan des xz, nous aurons pour les coordonnées de M :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R \cos \lambda, \\ y = 0, \\ z = R \sin \lambda. \end{array} \right\}$$

(*) Voyez sa *Geodesy*, Oxford, 1880, p. 316. Pour la valeur de l'ellipticité terrestre, voyez F. Tisserand, *op.* et *lib. cit.*, p. 368.

Les produits d'inertie sont

$$\left\{\begin{array}{l} \delta D = myz = 0, \\ \delta E = mzx = mR^2 \sin\lambda\cos\lambda = \dfrac{1}{2} mR^2 \sin 2\lambda, \\ \delta F = mxy = 0, \end{array}\right\}$$

tandis que les nouveaux moments principaux ont pour valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} A' = A + \delta A = A + m(y^2 + z^2) = A + mR^2 \sin^2\lambda, \\ B' = B + \delta B = A + m(z^2 + x^2) = A + mR^2, \\ C' = C + \delta C = C + m(x^2 + y^2) = C + mR^2\cos^2\lambda. \end{array}\right\}$$

D'après les formules (6), les composantes suivant Ox, Oy, Oz du déplacement angulaire des axes principaux sont

$$\left\{\begin{array}{l} U_x = 0, \\ U_y = -\dfrac{\delta E}{C' - A'} = -\dfrac{\dfrac{1}{2} mR^2 \sin 2\lambda}{(C - A) + mR^2\cos 2\lambda} \\ \qquad = -\dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{mR^2}{C - A}\sin 2\lambda}{1 + \dfrac{mR^2}{C - A}\cos 2\lambda}, \\ U_z = 0. \end{array}\right\}$$

Ainsi l'axe d'inertie OC se déplace suivant le méridien Ozx passant par M, du côté opposé à m, de l'angle

$$\vartheta = U_y = -\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{mR^2}{C - A}\sin 2\lambda}{1 + \dfrac{mR^2}{C - A}\cos 2\lambda}.$$

D'après un théorème dû à Clairaut,

$$C - A = \frac{2}{3}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right) . MR'^2.$$

où M désigne la masse du globe, ε son ellipticité, R′ son rayon équatorial et $\varphi = \frac{1}{289,66}$ le rapport de la force centrifuge à l'intensité de la pesanteur à l'équateur. On peut en déduire

$$\frac{m\mathrm{R}'^2}{C-A} = \frac{3}{2}\frac{1}{\varepsilon - \frac{\varphi}{2}} = 927,$$

puis

$$\frac{m\mathrm{R}^2}{C-A} = \frac{m}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}'^2}\frac{\mathrm{MR}'^2}{C-A} = 927\,\frac{m}{\mathrm{M}}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^2.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un déplacement à la surface du globe ; en toute rigueur on a

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}'(1 - \varepsilon \sin^2\lambda),$$

mais on peut très bien prendre R = R′. On obtient alors pour la valeur de ϑ

$$\vartheta = \mathrm{U}_y = -\frac{463,5\,\frac{m}{\mathrm{M}}\sin 2\lambda}{1 + 927\,\frac{m}{\mathrm{M}}\cos 2\lambda} = -463,5\,\frac{m}{\mathrm{M}}\sin 2\lambda + \left(463,5\,\frac{m}{\mathrm{M}}\right)^2 \sin 4\lambda - \ldots.$$

Si l'on néglige les puissances supérieures à la première du rapport $\frac{m}{\mathrm{M}}$, qui est toujours très faible, on peut prendre avec une exactitude suffisante (*)

$$\vartheta = \mathrm{U}_y = -463,5\,\frac{m}{\mathrm{M}}\sin 2\lambda; \quad (9)$$

cela revient à employer les formules (6′) au lieu des formules (6).

(*) Pour le coefficient numérique Helmert et Sommerfeld indiquent 456, Radau 460, tandis que Schiaparelli, se bornant à une évaluation assez grossière, donne 506. Le nombre que nous adoptons est celui de Schwahn.

La dernière valeur de s montre que *l'adjonction de la masse* m *a pour conséquence de déplacer le pôle d'inertie C suivant le méridien, du côté opposé à* m ; cette adjonction produit son effet maximum lorsqu'elle a lieu sous une latitude λ de 45° boréale ou australe.

On peut obtenir l'effet du *départ* d'une masse m (au lieu d'une adjonction) en affectant m du signe *moins* (*) dans les formules précédentes.

Si l'on a affaire à plusieurs adjonctions ou départs de masses isolées m, m', m'', ..., on pourra composer les déplacements partiels du pôle d'inertie C en un seul d'après la règle de la *composition des petits déplacements.*

Ainsi l'influence du déplacement, suivant le méridien, d'une masse m passant de la latitude λ à la latitude λ', peut s'obtenir en imaginant qu'une masse m soit enlevée au point M de latitude et qu'une masse égale m soit ajoutée au point M' de latitude λ'.

Par suite le déplacement correspondant du pôle C sera :

$$U_y = -463{,}5\,\frac{-m}{M}\sin 2\lambda - 463{,}5\,\frac{+m}{M}\sin 2\lambda'$$

$$= 463{,}5\,\frac{m}{M}(\sin 2\lambda - \sin 2\lambda')$$

$$= 927\,\frac{m}{M}\sin(\lambda - \lambda')\cos(\lambda + \lambda'). \qquad (10)$$

On tire cette conclusion : Si l'une des latitudes est boréale et l'autre australe, l'influence du transport de la masse m suivant le méridien peut devenir notable : le maximum de la déviation se produit pour $\lambda = 45°$ N et $\lambda' = 45°$ S (ou inversement), et cette valeur maxima est $927\,\frac{m}{M}$.

* * *

On peut calculer de la même façon le déplacement du pôle d'inertie C dû au transport d'une masse m le long d'un parallèle. Si λ désigne la latitude de ce parallèle et l, l' les longitudes (**)

(*) Voyez Schiaparelli, *op. cit.*, 1889, problème I (remarque).

(**) Nous comptons les longitudes dans le sens des rotations positives.

respectives des positions initiale et finale de m (dont nous représentons les coordonnées par x, y, z et x', y', z'), nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{R}\cos\lambda\cos l, \\ y = \mathrm{R}\cos\lambda\sin l, \\ z = \mathrm{R}\sin\lambda; \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} x' = \mathrm{R}\cos\lambda\cos l', \\ y' = \mathrm{R}\cos\lambda\sin l', \\ z' = \mathrm{R}\sin\lambda; \end{array}\right\}$$

R représente encore la distance de m au centre O de gravité.

Par l'application des formules (6''), nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}_x = \dfrac{\delta D}{C-A} = \dfrac{(-m)\mathrm{R}^2\sin\lambda\cos\lambda\sin l + (+m)\mathrm{R}^2\sin\lambda\cos\lambda\sin l'}{C-A} \\ \quad = \dfrac{1}{2}\dfrac{m\mathrm{R}^2}{C-A}\sin 2\lambda(\sin l' - \sin l) = 463{,}5\dfrac{m}{\mathrm{M}}\sin 2\lambda\,(\sin l' - \sin l), \\ \mathrm{U}_y = -\dfrac{\delta E}{C-A} = -\dfrac{(-m)\mathrm{R}^2\sin\lambda\cos\lambda\cos l + (+m)\mathrm{R}^2\sin\lambda\cos\lambda\cos l'}{C-A} \\ \quad = \dfrac{1}{2}\dfrac{m\mathrm{R}^2}{C-A}\sin 2\lambda\,(\cos l - \cos l') = 463{,}5\dfrac{m}{\mathrm{M}}\sin 2\lambda\,(\cos l - \cos l'), \end{array}\right\}$$

pour les composantes de la déviation, soit

$$\mathfrak{s} = \sqrt{\mathrm{U}_x^2 + \mathrm{U}_y^2} = 927\,\frac{m}{\mathrm{M}}\sin 2\lambda\sin\frac{1}{2}(l' - l), \quad (11)$$

et

$$\operatorname{tg}\mathrm{L} = -\frac{\mathrm{U}_x}{\mathrm{U}_y} = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(l + l'), \quad (12)$$

d'où

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}(l + l') - 90^\circ. \quad (12')$$

pour la valeur absolue $\mathfrak{s}$ de la déviation et pour l'angle L que forme son plan avec le plan $z\mathrm{O}x$.

Ainsi *le déplacement du pôle d'inertie C se fait dans un méridien perpendiculaire au méridien moyen* [*de longitude* $\frac{1}{2}(\mathrm{l} + \mathrm{l}')$] *et dans le sens opposé à celui du mouvement de* m.

* * *

Pour déterminer le déplacement du pôle d'inertie résultant d'un transport *radial* d'une masse m, suivant la verticale géocentrique du point M (où m se trouve avant le transport) de latitude λ, écrivons encore l'expression donnée ci-dessus pour l'adjonction de la même masse au même point M :

$$\mathfrak{s} = U_y = -\frac{\frac{1}{2}\frac{mR^2}{C-A}\sin 2\lambda}{1+\frac{mR^2}{C-A}\cos 2\lambda} = -\frac{1}{2}\frac{mR^2}{C-A}\sin 2\lambda + \left(\frac{1}{2}\frac{mR^2}{C-A}\right)^2 \sin 4\lambda - \dots$$

Supposer qu'une masse m située en un point interne du globe soit soulevée en M′ de la hauteur δR (mesurée suivant la verticale OM) revient à imaginer qu'il se produit en M un départ de m et en M′ une adjonction de m.

Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{mR^2}{C-A} = \dfrac{m}{M}\cdot\left(\dfrac{R}{R'}\right)^2\cdot\dfrac{MR'^2}{C-A}, \\ \dfrac{m(R+\delta R)^2}{C-A} = \dfrac{m}{M}\cdot\left(\dfrac{R+\delta R}{R'}\right)^2\cdot\dfrac{MR'^2}{C-A}, \end{array}\right.$$

R′ représentant le rayon équatorial de la Terre et M sa masse totale; $\frac{MR'^2}{C-A} = 927$, comme nous l'avons vu ci-dessus. Si nous nous bornons, dans le développement précédent, au terme du premier ordre en $\frac{m}{M}$, nous obtiendrons pour valeur de la composante U_y :

$$\left\{\begin{array}{l} U_y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(+m)}{M}\left(\dfrac{R}{R'}\right)^2 927\sin 2\lambda - \dfrac{1}{2}\dfrac{(+m)}{M}\left(\dfrac{R+\delta R}{R'}\right)^2 927\sin 2\lambda \\ \quad = -\dfrac{1}{2}\dfrac{m}{M}927\left[\dfrac{(R+\delta R)^2 - R^2}{R'^2}\right]\sin 2\lambda \\ \quad = -927\dfrac{m}{M}\left[\dfrac{R\,\delta R + \frac{1}{2}\delta R^2}{R'^2}\right]\sin 2\lambda, \end{array}\right.$$

ou, en négligeant la seconde puissance de δR,

$$\vartheta = U_y = -927 \frac{m}{M} \frac{R}{R'} \frac{\partial R}{R'} \sin 2\lambda .$$

Si l'on suppose que le soulèvement de m se fasse près de la surface, on peut prendre $\frac{R}{R'} = 1$; alors l'expression de ϑ devient

$$\vartheta = -927 \frac{m}{M} \frac{\partial R}{R'} \sin 2\lambda . \quad (13)$$

On voit donc que *l'effet dû à l'exhaussement vertical δR de la masse m s'obtient en multipliant par $2 \frac{\partial R}{R'}$ celui que produirait l'addition de cette masse au même endroit* (*).

On peut ainsi remarquer que des soulèvements ou affaissements locaux ont beaucoup moins d'influence, toutes choses égales, que des déplacements à la surface.

* * *

Les expressions que nous venons d'établir pour les composantes du déplacement du pôle d'inertie C se rapportent à différents cas particuliers de transports de masses *isolées*. Pour pouvoir appliquer ces formules au cas de soulèvements ou affaissements séculaires de continents ou de mers, nous devons les généraliser de manière à ce qu'elles puissent être encore valables pour des changements de position de masses distribuées d'une manière continue à la surface (ou à l'intérieur) du globe.

Désignons par R le rayon moyen terrestre, par l et λ la longitude et la latitude d'un élément de masse dm, par δ la densité de la Terre près de son écorce (**), et par K. $f(l, \lambda)$ la hauteur du soulèvement (ou la profondeur de l'affaissement) de dm en

(*) F. Tisserand, *op.* et *lib. cit.*, p. 486.

(**) Nous nous bornerons ici à étudier les soulèvements ou affaissements des parties voisines de la surface de la Terre. δ est supposée constante sur toute la surface du globe.

fonction des coordonnées géographiques l, λ de cet élément (*).

Le volume élémentaire $d\tau$, contenant l'élément dm de masse, s'exprime en coordonnées polaires par

$$d\tau = \mathrm{R}\, d\lambda \times \mathrm{R}\cos\lambda \,.\, dl \times \mathrm{K} \,.\, f(l,\lambda) = \mathrm{R}^2\,\mathrm{K} \,.\, f(l,\lambda)\cos\lambda d\lambda dl;$$

l'élément dm est alors :

$$dm = \delta \,.\, d\tau = \mathrm{R}^2\mathrm{K}\delta \,.\, f(l,\lambda)\cos\lambda d\lambda dl.$$

Les produits d'inertie qui naîtront du déplacement de toutes les masses élémentaires analogues seront fournis par

$$\left\{\begin{array}{l} \delta D = \Sigma yz\,dm = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{R}^4.\,\mathrm{K}\delta \,.\, \iint f(l,\lambda)\sin 2\lambda\cos\lambda\sin l\, d\lambda dl, \\ \\ \delta E = \Sigma zx\,dm = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{R}^4.\,\mathrm{K}\delta \,.\, \iint f(l,\lambda)\sin 2\lambda\cos\lambda\cos l\, d\lambda dl, \end{array}\right\} \quad (14)$$

puisque

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{R}\cos\lambda\cos l, \\ y = \mathrm{R}\cos\lambda\sin l, \\ z = \mathrm{R}\sin\lambda, \end{array}\right\}$$

sont les coordonnées de dm.

D'après la formule de Clairaut rappelée ci-dessus,

$$C - A = \frac{\mathrm{MR}'^2}{927} = \frac{4}{3}\frac{\pi}{927}\,\mathrm{R}'^3\mathrm{R}^3\delta_m, \quad (15)$$

δ_m désignant la densité moyenne du globe et R′ le rayon équatorial.

Les formules (6″)

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}_x = \dfrac{\delta D}{C - A}, \\ \\ \mathrm{U}_y = -\dfrac{\delta E}{C - A}, \end{array}\right\}$$

(*) K est considérée ici comme une grandeur linéaire ; $f(l,\lambda)$ est la loi de variation en question, se chiffrant en nombre abstrait.

combinées aux valeurs (14) et (15), permettent de déterminer les composantes U_x, U_y du déplacement du pôle d'inertie C.

La difficulté d'appliquer ces formules à des cas particuliers provient du fait qu'il n'est pas commode, en général, de spécifier la fonction $f(l, \lambda)$. Les émergences et les dépressions terrestres ont des contours très irréguliers; et, à l'intérieur de ces contours, la loi de variation de l'intensité du mouvement avec la longitude et la latitude du lieu ne peut guère être fixée d'une manière certaine.

Pour ces causes la fonction $f(l, \lambda)$ ne peut être déterminée commodément.

Cependant il est possible, si l'on se borne aux grandes lignes, de faire quelques hypothèses approchées (plus ou moins grossières) sur cette fonction; c'est ce qu'a fait G.-H. Darwin dans son célèbre Mémoire de 1877 (*). On peut comparer alors les résultats correspondant à ces hypothèses avec ceux de l'observation, et tirer de la comparaison quelques conclusions relatives à la répartition des creux et des reliefs de l'écorce de notre globe.

* * *

Le moyen de calculer les déviations du pôle d'inertie C ayant été indiqué, examinons très brièvement quelle est l'importance numérique des changements que nous voyons s'opérer sous nos yeux (**).

Éruptions volcaniques. Il ne semble pas que le centre d'ébranlement des tremblements de terre, précédant ou accompagnant

---

(*) *Philosophical Transactions*, t. CLXVII, 1877, p. 290, § 14 : *Forms of continents and seas produce the maximum deflection of the polar axis.* Voyez aussi P. Schwahn, *op. cit.*, § 8.

(**) Pour les renseignements numériques, on peut consulter l'excellent article du Dr K. Zöppritz : *Der gegenwärtige Standpunkt der Geophysik.* (Geographisches Jahrbuch, t. VIII, Gotha, 1880.)

des éruptions volcaniques, ait jamais été situé à une profondeur supérieure à $5^{km}5$.

Admettons qu'un volcan, comparable au *Tambora* de l'île de Soumbava (*), soit situé sous la latitude de 45° (boréale ou australe) et qu'il rejette, dans une de ses éruptions, un volume de $14^{km^3}5$ de cendres parti de la profondeur $5^{km}5$. Nous nous plaçons dans une hypothèse fort avantageuse, comme on le voit; car c'est sous la latitude de 45° qu'un transport radial de masse a le plus d'influence, et le volume de $14^{km^3}5$ est, d'après Zolikofer, celui que le Tambora a vomi dans son éruption si violente de 1815. En employant la formule (13) donnée ci-dessus, nous trouvons (**)

$$\vartheta = U_1 = -927\,\frac{14{,}5\,\delta_0}{M}\,\frac{5{,}5}{6370},$$

soit à la surface du globe

$$\vartheta R'' = -0^m01,$$

R'' représentant le rayon polaire.

Si, toutes choses égales, on admettait que ce volcan rejetât un volume de cendres égal à celui que le Vésuve a vomi dans son éruption la plus violente (connue depuis 1631), on trouverait seulement

$$\vartheta R'' = -0^m000\,000\,6.$$

Si le volcan en activité est supposé placé sous l'équateur, $\lambda = 0$, $\sin 2\lambda = 0$, et

$$\vartheta R'' = 0 :$$

(*) Petite île de la Sonde, voisine de celle de Java. Le Tambora a, en réalité, une latitude voisine de 8° (australe).

(**) Dans cette formule δ_0 représente la densité des cendres évaluée en kilogrammes par kilomètre cube et M le poids du globe (environ 6×10^{24} kilogrammes).

l'éruption n'a alors aucune influence sur la position du pôle d'inertie; mais on peut voir que la durée du jour subit une très légère fluctuation (*)

On constate donc que les éruptions volcaniques actuelles (isolées) ne peuvent guère apporter de changement appréciable dans la position du pôle d'inertie C à la surface du globe. Cependant il est possible que, dans le cours des siècles, l'action répétée d'éruptions voie ses effets s'accumuler jusqu'à produire une déviation de ce pôle de quelque importance; cette remarque est surtout à noter pour un globe non rigide, mais plastique (**).

Soulèvements et affaissements séculaires de continents. — G.-H. Darwin s'est demandé (***) quelle aurait dû être la répartition des intumescences et des affaissements (qui détermineraient la configuration des terres et des mers) capable de produire le maximum de déviation du pôle C.

La solution (que nous ne pouvons reproduire ici), basée sur le calcul des variations, indique que la ligne de séparation entre les continents et les océans aurait dû être l'intersection d'une surface conique avec la surface du sphéroïde terrestre (iv).

Ce savant calcule aussi le déplacement de C qui résulterait d'un soulèvement actuel d'un continent, accompagné d'un affaissement correspondant, dans les conditions qui assurent le maximum d'effet.

En employant les formules (6″), (14), (15) avec ces conditions

---

(*) Voyez L. Picart, *op. cit.*, 1897, § 15.

(**) Voyez G.-H. Darwin, *op. cit.*, 1877, § 4, et J.-V. Schiaparelli, *op. cit.*, 1889, articles II et III.

(***) *Op. cit.*, § 14.

(iv) Voyez aussi P. Schwahn, *op. cit.*, § 8.

de maximum, on trouverait avec lui ces résultats pour une hauteur de soulèvement de 100 mètres (*) :

Aire de soulèvement, en fraction de la surface totale du globe.	Déviation en secondes du pôle d'inertie C.
0.001	4.4
0.005	22
0.010	44
0.050	210
0.100	387
0.200	660
0.500	950

Ainsi, si le continent africain (représentant environ les 0,059 de la surface totale du globe) était soulevé de 100 mètres, le pôle C ne serait encore dévié que de 4 minutes d'arc.

Un soulèvement de 1 mètre par siècle d'un continent représentant les 0,025 de la surface totale, accompagné d'une dépression équivalente, ne produirait qu'une déviation de 1″ en un siècle, soit en moyenne de 0″,01 par an. Il est clair qu'on ne constate *actuellement* aucun soulèvement de cette importance.

S. Haughton (**) a appliqué aussi les formules (14) que nous avons données ci-dessus au calcul du déplacement du pôle qui résulterait du soulèvement continu de grands continents. En prenant pour surface de comparaison celle de l'ellipsoïde, homothétique à celui des mers, possédant le même volume que la masse totale solide du globe, il supposait que la hauteur *moyenne*

(*) Voyez F. Tisserand, *op.* et *lib. cit.*, p. 531. Radau a réduit les chiffres de Darwin, donnés pour un soulèvement de 10 000 pieds, à ceux correspondant à une élévation de 100 mètres.

(**) *Proceedings of the Royal Society*, Londres, t. XXVI, 1878.

des continents au-dessus de cette surface était de 2 660 mètres. Il a obtenu de la sorte pour composantes du déplacement polaire dû au soulèvement des continents et à l'affaissement des vallées océaniques, les résultats suivants, exprimés en kilomètres (*) :

	Continents et mers.	Composantes du déplacement du pôle Nord d'inertie suivant les méridiens de			
		Greenwich 0°	Rangoun 90° E	Détroit de Behring 180° E	Yucatan 270° E
Soulèvements	Europe et Asie	—	—	31.5	106.9
	Afrique	—	1.7	14.5	—
	Amérique du Nord	8.2	56.6	—	—
	Amérique du Sud	10.7	—	—	18.8
	Australie et Océanie	—	16.2	16.2	—
Affaissements	Océan pacifique septentrional	—	—	134.4	1.8
	Océan pacifique méridional	127.8	83.8	—	—

Ces chiffres ne peuvent se rapporter qu'aux cataclysmes qui se seraient produits avant la venue de l'homme sur la Terre.

Si l'on calcule la déviation du pôle d'inertie qui résulterait de l'élévation de 10 centimètres de chaque continent, on obtient :

Europe et Asie . . . . . déviation de 4^m17
Afrique. 0.55
Amérique du Nord 2.15
Amérique du Sud 0.81
Australie 0.86;

(*) Voyez aussi P. Schwahn, *op. cit.*, § 9. Pour l'altitude moyenne probable de la terre ferme, consultez aussi les travaux de Krümmel, Penck, Supant, Murray, de Tillo, de Lapparent, etc.

d'après cela, un soulèvement de 1 centimètre de l'Europe et l'Asie pourrait *seul* produire une déviation du pôle décelable par l'observation ; pour les autres continents un tel soulèvement n'aurait pas de répercussion sensible sur la position de ce pôle.

On peut encore montrer, en se servant toujours des formules (6″), (14) et (15), que si la Suède et la Norwège se soulevaient (ou s'affaissaient) de 2 mètres, le pôle se déplacerait de 1 mètre environ.

Si l'on a constaté effectivement un soulèvement de ces contrées (*), la valeur numérique que Humboldt a indiquée, soit 100 mètres en 8000 ans, ne permet pas d'attribuer à ce phénomène une influence *actuelle* sensible sur le déplacement du pôle.

Dans son Mémoire de 1889, J.-V. Schiaparelli s'est livré aussi à des calculs de ce genre. Il a trouvé que le soulèvement du grand plateau central de l'Asie (du niveau de comparaison à son altitude moyenne) aurait eu pour conséquence de rapprocher le pôle d'inertie de l'Amérique d'une vingtaine de mètres.

Comme conclusion de ce qui précède, nous dirons que les soulèvements ou affaissements *actuels* des continents ou des vallées océaniques ne semblent pas suffisants pour pouvoir déplacer le pôle d'inertie de quelques centièmes de seconde.

Influence des mers : marées océaniques, courants marins, etc. — Indépendamment de l'influence que peuvent avoir l'existence et le frottement des marées océaniques sur la durée du jour sidéral et le mouvement de la Lune (**), ces marées peuvent encore exercer une action sur la position du pôle d'inertie C à la surface de la Terre. Ces marées sont produites par l'action combinée de la Lune et du Soleil ; l'action de ce dernier n'étant qu'environ la moitié de celle de la Lune, on peut supposer, pour simplifier, que c'est ce satellite qui produit à lui seul le gonflement des mers. Nous avons admis que les moments d'inertie de

---

(*) Voyez les œuvres de Celsius, Linné, L. V. Buch.

(**) Voyez les nombreux travaux relatifs à l'*accélération séculaire* du mouvement de la Lune (Cf. Bibliographie).

la Terre par rapport à deux axes équatoriaux rectangulaires sont égaux

$$A = B,$$

si l'on fait abstraction des mers. Mais l'intumescence liquide, due à l'action lunaire, détruit cette égalité, et le pôle d'inertie C est dévié en C′ : le pôle C′ tourne autour de son ancienne position à mesure que le flux se déplace en faisant le tour de la Terre.

Soient m, M les masses de la protubérance liquide et du globe solide sous-jacent, s la base du volume (sensiblement) conique de cette protubérance, S la surface de la Terre, h la hauteur de la marée, R le rayon moyen terrestre. En prenant pour densité moyenne de la Terre 5,56 (par rapport à celle de l'eau prise pour unité), nous aurons (*)

$$\frac{m}{M} = \frac{\frac{1}{3} h . s \times 1}{\frac{1}{3} R . S \times 5{,}56} = \frac{h}{35\,400\,000} \times \frac{s}{S}.$$

Si nous supposons que le centre de la protubérance soit situé sur le parallèle de 20°, si nous composons les résultats dus aux deux protubérances opposées et aux deux dépressions opposées, nous obtiendrons, en appliquant la formule (9)

$$\vartheta = - 463{,}5 \frac{4m}{M} \sin 40° = 1''{,}72 \frac{4s}{S} \frac{h^{\text{mètres}}}{1^{\text{mètre}}} < 1''{,}72 h,$$

h désignant la hauteur de la marée exprimée en mètres. Si l'on adopte $h = 0{,}6$, le déplacement du pôle C est encore inférieur à une seconde d'arc.

Nous exposerons plus loin une application de ce résultat due à Radau : nous verrons que, quoique cette déviation du pôle

(*) F. Tisserand, *op.* et *lib. cit.*, p. 535.

d'inertie soit très sensible, sa répercussion sur la position du pôle de rotation est presque nulle à cause de la *brièveté* de la période de la marée.

Relativement aux courants marins, nous serons très concis. Outre l'*influence directe* qu'ils exercent sur la rotation de la Terre, ils peuvent encore amener certaines variations dans la répartition des masses. D'après la remarque de J. Lamp (*), il semble ressortir de l'étude des courants océaniques que l'hémisphère boréal est chargé pendant l'été d'un excédent d'eau, et que cet excédent se transporte en hiver sur l'hémisphère austral ; cette variation dans la distribution des masses pourrait expliquer jusqu'à un certain point le déplacement observé du pôle d'inertie.

Fonte ou déplacement des glaciers. — Dans son discours présidentiel de Glascow (**), W. Thomson a émis l'avis que (les mouvements des vents et des mers et surtout) la fonte d'une calotte de glace au pôle pourrait amener un déplacement polaire de $0'',5$, résultat qui a été contesté par S. Newcomb (***) et F. R. Helmert (IV). D'après A. Waters (V), la fonte d'une telle calotte aurait pour effet, vu la configuration des terres et des mers, de déplacer le pôle Nord d'inertie sur le méridien de 45°44′ (Est Greenwich), par la surévélation du niveau des mers à laquelle elle donnerait lieu. [Cette surévélation serait de $8^m,7$ si on supposait qu'elle fût causée par la fonte d'un amas circulaire de 1000 pieds ($313^m,8$) limité par le parallèle de 70°N ; évidemment cette hypothèse est de beaucoup exagérée].

(*) *Ueber Niveauschwankungen der Ozeane als eine mögliche Ursache der Veränderlichkeit der Polhöhe.* (ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, t. CXXVI, 1891, n° 3014).

(**) Voyez *Report of Meeting of the British Assoc. for the adv. of Sc.*, Londres, 1876, p. 11.

(***) *Op. cit.*, 1892.

(IV) *Op.* et *lib. cit.*, 1884

(V) *Table of effect of mouvement of the surface of the globe...* (MANCHESTER LIT. AND PHIL. SOCIETY, 1877.) Voyez aussi les travaux du géologue anglais BELT.

S. Newcomb fait observer qu'un tel phénomène doit avoir un effet d'autant moindre qu'il se produit plus près du pôle : ce qui est le cas ici.

Les glaciers isolés, bien que plus éloignés du pôle, ne peuvent amener des variations sensibles dans la position de ce pôle à cause de leurs faibles masses. Il est donc superflu de se livrer ici à une estimation quelconque.

Chutes de neige et de pluie. — Comme nous venons de le dire, W. Thomson a invoqué les phénomènes météorologiques comme cause pouvant produire les déviations très sensibles du pôle.

En se plaçant dans les conditions les plus avantageuses, S. Newcomb (*) a trouvé que ces déviations ne pouvaient guère atteindre 0″,05; cependant il pensait que, grâce à la *multiplication* indiquée par Radau (voyez paragraphe suivant), le *pôle de rotation* pourrait subir des déplacements atteignant quelques dixièmes de seconde. Il allait même jusqu'à dire que les mouvements observés du pôle de rotation pourraient être attribués à des chutes annuelles de neige, si l'hiver en Sibérie et l'hiver dans l'Amérique du Nord se produisaient alternativement : ce qui est, du reste, contraire à la réalité.

Les données sur les quantités d'eau annuelles moyennes tombées sous forme de pluie sont très divergentes. Si nous admettons que les pluies peuvent recouvrir en un an la surface du globe d'une couche d'eau de 0ᵐ73 (**), si nous supposons qu'une masse de hauteur h, recouvrant uniformément cette surface, soit concentrée à 45° de latitude, la grandeur du déplacement du pôle C est exprimée, d'après la formule (9), en secondes d'arc par

$$\mathfrak{s} = -8''1 \,.\, h,$$

(*) *Op. cit.*, 1892.

(**) P. Schwahn, *op. cit.*, § 7.

où h est mesuré en mètres. Si nous admettons aussi que $\frac{1}{100}$ de l'eau tombée n'est pas évaporée, nous obtenons :

$$\vartheta = -0''059$$

puisque alors $h = 0{,}0073$. Mais ce résultat doit être notablement réduit, car il ne se produit pas d'accumulation d'eau en un point ; la masse d'eau se répartit sous des latitudes diverses. L'influence immédiate des pluies est donc insignifiante.

Ruissellement, formation des alluvions. — Le mécanisme connu de l'évaporation de l'eau et de la chute de cette dernière sous forme de pluie a pour conséquence de produire le ruissellement de l'eau à la surface de la Terre, la formation des rivières et des fleuves.

Indépendamment de l'*influence directe* des cours d'eau, il peut encore se produire des déplacements du pôle d'inertie dus à des transports de masses (changeant leur distribution). Ces cours d'eau enlèvent continuellement des particules de roches, de terrains déjà sédimentaires et les laissent se déposer à leur embouchure sous forme d'*alluvions*. Les fleuves et les rivières ne sont pas seuls à produire des érosions : la mer elle-même ronge les rives qui l'entourent ; seulement, d'après J. Murray (*), son action serait environ dix-sept fois moindre que celle des eaux courantes ; d'après A. de Lapparent (**), elle ne serait que dix fois moindre.

Si l'on considère la répartition actuelle des cours d'eau, on voit immédiatement que l'effet résultant de leurs actions sur la position du pôle d'inertie C ne peut pas s'obtenir en additionnant les actions respectives de chaque fleuve, mais bien en déterminant leur *résultante géométrique*. Si les grands fleuves de Sibérie

---

(*) *Scottish Geographical Magazine*, 1887-1889.

(**) *La destinée de la terre ferme*, Paris, Bloud, 1904. (Collection Science et Religion).

montrent une tendance à déplacer le pôle Nord d'inertie dans le méridien de longitude 100°E (Est de Greenwich), le Mississipi semble solliciter le même pôle à se déplacer dans le méridien de longitude 90°0 (de Greenwich). Le Dniéper, le Don, le Volga contrebalancent de la même façon l'influence du Nil, de l'Amour, du Fleuve Bleu, du Fleuve Jaune, etc. Seul l'Amazone, à l'action duquel ne s'oppose aucune autre de même intensité, peut avoir une influence sensible sur le déplacement du pôle, car son cours est voisin de l'équateur. Enfin il faut remarquer que l'Indus, le Gange et le Bramapoutre ont une tendance à renforcer l'action des fleuves de Sibérie.

Pour déterminer l'action de chaque fleuve, il faut aussi connaître son débit et la proportion de limon qu'il charrie. Nous ne pouvons évidemment pas nous livrer ici à des estimations de ce genre; contentons-nous de dire que les chiffres varient dans de grandes limites. La proportion *moyenne* la plus probable des matières solides entraînées par les eaux serait, d'après J. Murray (*), de 38 parties pour 100 000, ce qui est à peu près le chiffre indiqué par Geikie, de Lapparent, Reclus.

Pour A. Waters (**), l'apport total des fleuves est distribué par les courants marins de manière que l'hémisphère Sud reçoive chaque année un excédent de 3 230 millions de tonnes. En employant la formule (9) donnée plus haut et en supposant la masse concentrée à 45° de latitude (correspondant à l'effet maximum), on trouve

$$\vartheta = -0''015$$

par siècle; mais cette opinion semble exagérée.

En appliquant la formule (10) précédente relative au trans-

(*) *Op. cit.*

(**) *Inquires concerning a change...* (Manchester Lit. and Phil. Society, t. VI, 1879.)

port d'une masse *m*, Lloyd Morgan (*) a donné les chiffres suivants :

FLEUVES.	Déplacement en mètres du pôle d'inertie	en une durée de
Mississipi	0.152	6 000 ans
Gange	0.109	2 358 »
Danube	0.110	6 842 »

Enfin, selon Twisden (**), par l'action des fleuves, il se produirait actuellement une tendance du pôle Nord à se déplacer dans le méridien 90° E (de Greenwich).

J. V. Schiaparelli (***) a fait l'hypothèse suivante. Il supposait que le grand plateau central de l'Asie pût être charrié en entier, mais petit à petit, par les fleuves de l'Inde jusqu'au fond de l'Océan et que le centre du nouveau dépôt ainsi formé se trouvât précisément sur l'équateur. Alors le pôle d'inertie descendrait le long du méridien moyen du haut plateau et s'approcherait de son centre d'une grande quantité, soit $30^{km}3$. Il va sans dire que nous ne pouvons tirer aucune conclusion de là pour estimer l'ordre de grandeur des déplacements du pôle produits par l'érosion continentale actuelle : en effet, nous n'avons aucune idée du temps que devrait durer ce charriage.

Comme résumé de ce qui vient d'être dit, l'action fluviale ne peut produire que des actions séculaires de faible intensité.

Action chimique des eaux. — A l'action mécanique des eaux

(*) *On geological time.* (GEOL. MAGAZINE, Londres, 1878.)

(**) *The deplacement of the Earth's axis.* (MANCHESTER LIT. AND PHIL. SOC., 1878; QUARTERLY JOURNAL OF THE GEOLOGICAL SOCIETY, Londres, 1878.) Voir également les estimations de LYELL.

(***) *Op. cit.*, 1889, probl. III.

vient s'adjoindre leur action chimique, beaucoup plus efficace qu'on ne pourrait le croire : en effet, elles contiennent une proportion assez notable d'acide carbonique, soit qu'elles l'empruntent à l'atmosphère, soit qu'elles en trouvent la source dans la décomposition des matières organiques du sol. Cet acide carbonique, dissous dans l'eau, corrode les calcaires et attaque à la longue le feldspath des granits.

T. Mellard Reade (*) évalue à 12 900 ans le temps que mettrait l'action chimique seule pour enlever un pied anglais, soit 0^m305, à la surface de l'Angleterre ; si ce chiffre est exact, il se produira, pendant ce laps, un déplacement polaire de

$$\vartheta R = 0^m141.$$

En 1885, dans son discours présidentiel de la Société Géologique de Liverpool, il admet que, pour le Mississipi, le Danube et le Nil, les matières dissoutes doivent être aux sédiments charriés mécaniquement comme 7 est à 3, c'est-à-dire que l'action chimique de ces fleuves est *plus que double* de l'action mécanique.

Selon A. L. Ewing (**), dans la région des Apalaches les terrains calcaires doivent perdre 300 mètres en un million d'années.

Mais ces chiffres paraissent exagérés. Il est plus prudent de s'en tenir à l'estimation de J. Murray (***) d'après laquelle l'action chimique ne serait, au contraire, que *la moitié* de l'action mécanique. Selon ce savant, les eaux fluviales contiennent par kilomètre cube environ 182 tonnes de substances dissoutes (dans ce total les carbonates entreraient pour 100 tonnes, la silice pour 18, les sulfates pour 20). A ce taux, l'ensemble des fleuves apporterait chaque année à la mer près de 5 kilomètres cubes de matières dissoutes qui y seraient fixées par les organismes marins, tels que les globigérines, les diatomées, les coraux, etc. (IV).

(*) *American Journal of Science*, (3), t. XIII.

(**) *American Journal of Science*, (3), t. XXIX.

(***) *Scottish Geographical Magazine*, 1887.

(IV) Voyez aussi les travaux de DAUBRÉE, BISCHOF, BREITENLOHNER.

On peut s'assurer, en appliquant les formules précédentes, que cette influence chimique est, à elle seule, insuffisante pour provoquer des changements sensibles de la position du pôle d'inertie.

Evaporation de lacs ou de mers intérieures. — Pour donner une idée de l'ordre de grandeur que peut atteindre le déplacement du pôle dû à une telle cause, nous nous placerons dans des circonstances idéales propres à déterminer un maximum de déplacement.

Supposons, avec A. Waters (*), qu'une mer, de même profondeur moyenne que la Caspienne (61^m) et de surface double ($2 \times 21\,000$ kilomètres carrés), placée sous la latitude de 40°, s'évapore sous l'action d'une cause quelconque. Il en résultera un déplacement du pôle donné par la formule (9) : $\vartheta = 0,''88$, soit en mètres

$$\vartheta R = 27^m2$$

s'effectuant dans la direction de la Mer Blanche. Ce dernier chiffre est très appréciable; mais il est clair que l'hypothèse est de beaucoup exagérée.

Les phénomènes que nous venons d'étudier peuvent donc amener des déplacements séculaires du pôle d'inertie, mais sont incapables de lui communiquer des oscillations sensibles dans un court intervalle de temps. Enfin il reste à examiner une classe de phénomènes annuels qui peuvent amener des changements appréciables dans la répartition des masses, changements qui semblent d'ailleurs avoir pour période l'année. Comme nous le verrons plus bas, la périodicité des déplacements du pôle d'inertie se retrouve dans ceux du pôle de rotation; de plus si cette période (12 mois) est voisine de la période naturelle d'oscillation de ce dernier pôle (14 mois), ce qui est le cas ici, ces déplacements du pôle d'inertie peuvent avoir pour conséquence des perturbations *fortement amplifiées* dans le mouvement du pôle de rotation (**) ; cette amplification peut être sextuple. Si donc

(*) *Op. cit.*, 1879.

(**) C'est cette amplification qui constitue la *multiplication* de Radau.

nous montrons qu'il existe une classe de phénomènes météorologiques annuels pouvant produire des oscillations du pôle d'inertie atteignant *quelques centièmes de seconde*, nous aurons prouvé que les oscillations de seconde espèce (annuelles) du pôle de rotation, qui atteignent à peine $0'',3 = 0'',05 \times 6$, peuvent être mises sur le compte de ces phénomènes; ces derniers sont les perturbations atmosphériques (*).

Perturbations atmosphériques. — Comme on le sait, la pression barométrique est, en moyenne, plus forte en hiver qu'en été : la différence de pression sera donc positive dans l'hémisphère Nord et négative dans l'hémisphère Sud de janvier à juillet. Cette différence n'est évidemment pas la même pour un continent que pour une mer, car l'existence en un endroit d'une grande quantité d'eau a pour effet d'affaiblir les oscillations barométriques en cet endroit. L'étude des cartes à lignes isobares a semblé montrer à R. Spitaler (**) qu'il se produit en janvier un excès de pression barométrique sur l'Europe, l'Asie et l'Amérique du Nord équivalant à 1 010 kilomètres cubes de mercure, et qu'en juillet au contraire ce sont l'Afrique, l'Australie et l'Amérique du Sud qui supportent l'excès de pression (un peu moindre, soit 736 kilomètres cubes de mercure). Comme conséquence, le pôle d'inertie C se déplacerait environ de $0,''21$ suivant le méridien de 75°; et, à cause de la relation de position qui existe entre ce pôle et le pôle de rotation I, ce déplacement aurait sa répercussion sur la loi du mouvement de I à la surface du globe (***).

L. Grabowski (IV) a montré que Spitaler, en comparant ses résultats avec ceux de l'observation, se contentait d'un accord plus

---

(*) On pourrait peut-être aussi invoquer les changements dans la répartition des eaux océaniques que J. Lamp a indiqués (voir plus haut).

(**) *Die Ursache der Breitenschwankungen.* (Denkschriften der Kais. Akad. d. Wiss., Vienne, 1897.)

(***) Voyez le paragraphe suivant.

(IV) *Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegungen.* (Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wiss., Vienne, 1898.)

apparent que réel; que les variations atmosphériques envisagées par ce dernier jouaient un rôle important dans les mouvements du pôle d'inertie C, mais que, à ce qu'il paraissait, il était nécessaire d'en faire intervenir d'autres qui leur fussent comparables et qui produisissent une déviation de C du même ordre (dans une direction perpendiculaire à celle de la première).

R. Spitaler (*) a repris plus récemment ces considérations en se basant encore sur l'étude des lignes isobares. Il lui semblait démontré que l'excès de pression se concentrait de janvier en juillet, dans l'hémisphère Nord, sur le continent asiatique, tandis qu'il se manifestait de juillet en janvier, dans l'hémisphère Sud, en trois endroits séparés : l'Afrique du Sud, l'Amérique du Sud et l'Australie. Ainsi en janvier régnerait sur l'hémisphère Nord, entre les parallèles de 0° et 80°, un excès d'air équivalant à 192,5 km^3 de mercure; en juillet, sur l'hémisphère Sud se produirait, par contre (entre 0° et 50°), un excès de 402,2 km^3 de mercure. Ces inégalités dans la répartition donneraient, d'après la formule (9),

en janv. un écart de	0″055	dans la direction	100° Ouest	de Greenwich.
en juill. »	0″041	»	68° Est	

Le pôle d'inertie C oscillerait, d'après cela, dans deux directions sensiblement opposées et de quantités de même ordre. Pour avril et octobre, on n'a pas déterminé directement les valeurs des amplitudes, mais on croit pouvoir affirmer qu'elles restent inférieures aux valeurs indiquées ci-dessus. Le pôle d'inertie C tournerait ainsi dans le sens Est-Ouest (rétrograde) à la surface du globe.

Cependant on ne peut rien dire de certain sur la trajectoire de ce pôle, au moins d'après des estimations de ce genre.

On peut, comme L. Grabowski (**) et dans la suite A. Sommer-

(*) *Die periodischen Luftmassenverschiebungen und ihr Einfluss auf die Lagenänderungen der Erdachse.* (Petermann's Mitteilungen. 1901, n° 137.)

(**) *Op. cit.*, 1898, § 4.

feld (*) l'ont conseillé, déduire le mouvement de C de celui *(observé)* du pôle de rotation I, et le comparer à ces résultats d'expérience.

Ce qu'il est important de remarquer ici, c'est que les oscillations du pôle d'inertie peuvent déjà atteindre *quelques centièmes de seconde*, si l'on a égard seulement à ces perturbations atmosphériques.

§ 2. *Relation de position entre le pôle d'inertie C et le pôle de rotation I.*

Après avoir déterminé, dans le paragraphe précédent, les oscillations du pôle d'inertie C dues aux transports de masses, nous devons chercher actuellement quelle relation de position existe entre ce pôle et le pôle de rotation I : nous connaîtrons par là la manière dont ces transports influent sur le mouvement de ce dernier pôle à la surface de la Terre.

Voici la méthode proposée par W. Thomson (**).

Prenons pour O le centre de gravité de la partie rigide du globe (***); choisissons pour axes de référence $Oxyz$ les axes principaux de l'ensemble à chaque instant et pour axes $O\xi\eta\zeta$ les axes moyens (qui coïncident, par exemple, à l'époque initiale avec $Oxyz$). Les équations du mouvement prennent alors la forme simple (iv) :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(A\omega_x) + q(C\omega_z) - r(B\omega_y) = \mathrm{L} = 0, \\ &\frac{d}{dt}(B\omega_y) + r(A\omega_x) - p(C\omega_z) = \mathrm{M} = 0, \\ &\frac{d}{dt}(C\omega_z) + p(B\omega_y) - q(A\omega_x) = \mathrm{N} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{H}')$$

(*) *Op.* et *lib. cit.*, 1903, p. 723. Voyez aussi le § 3 de ce litt. *b*.

(**) Appendice *C* du Mémoire de G.-H. Darwin : *Influence of the geological changes....* (Philosophical Transactions, Londres, 1877, t. CLXVII, p. 308). Voyez aussi Helmert, Schwahn, Tisserand, *op. cit.*, et notre opuscule.

(***) Voyez troisième Partie, section *A*, § 3.

(iv) Voyez troisième Partie, section *A*, § 2.

Dans ces équations p, q, r représentent les composantes, suivant Ox, Oy, Oz, de la rotation $\bar{o}$ du trièdre $Oxyz$ formé par ces axes ; ω_x, ω_y, ω_z les composantes, suivant ces mêmes axes, de la rotation $\bar{\omega}$ du trièdre $O\xi\eta\zeta$ (*rotation moyenne* du globe) (*) ; A, B, C les moments principaux d'inertie instantanés de la Terre par rapport au centre de gravité O de sa partie rigide.

Si nous supposons que les axes moyens restent sensiblement fixes dans la charpente rigide du globe (**), la rotation moyenne $\bar{\omega}$ sera la rotation instantanée de cette charpente.

W. Thomson introduit à la place de ω_x, ω_y, ω_z les cosinus directeurs

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 = \dfrac{A\omega_x}{G}, \quad c_2 = \dfrac{B\omega_y}{G}, \quad c_3 = \dfrac{C\omega_z}{G}, \\ G^2 = A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2, \end{array} \right\}$$

de l'axe invariable $\overline{OG}$ du moment résultant des quantités de mouvement absolu de l'ensemble, par rapport aux axes principaux instantanés Ox, Oy, Oz.

Alors

$$\omega_x = \frac{Gc_1}{A}, \qquad \omega_y = \frac{Gc_2}{B}, \qquad \omega_z = \frac{Gc_3}{C}. \qquad (a)$$

c_1, c_2, c_3 représentent aussi les coordonnées de l'intersection G_0 de l'axe OG avec une sphère de centre O et de rayon 1 ; ce sont encore, très sensiblement, les coordonnées de l'intersection I_0 de l'axe OI avec la sphère.

(*) En fait, comme nous l'avons déjà dit, ni W. Thomson, ni G.-H. Darwin ne parle de rotation moyenne. Mais comme ils négligent pratiquement les moments σ_x, σ_y, σ_z des quantités de mouvement relatif, ils emploient au fond les axes moyens, tout en supposant que ces axes restent fixes dans la carcasse rigide du globe. On peut admettre cette hypothèse si l'on suppose que les petites masses sont isolées ou se neutralisent sensiblement.

(**) Voyez note précédente ; cf. TISSERAND, *op.* et *lib. cit.*, p. 531 ; P. SCHWAHN, *op. cit.*, § 4, et HELMERT, *op. cit.*, 1878, p. 312.

La rotation $\bar{o}$ du trièdre formé par les axes principaux instantanés est différente de celle $\bar{\omega}$ de la charpente rigide. Nous écrivons

$$\left\{\begin{array}{l} p = \omega_x + u_x, \\ q = \omega_y + u_y, \\ r = \omega_z + u_z; \end{array}\right\} \qquad (b)$$

u_x, u_y, u_z représentent alors les composantes, suivant Ox, Oy, Oz, de la rotation « différencielle »

$$\bar{u} = \bar{o} - \bar{\omega}$$

qui mesure l'avance des axes principaux sur les axes moyens ; on peut les appeler *vitesses angulaires de déviation ;* cette déviation résulte du déplacement des petites masses. Introduisant les valeurs (a) dans les expressions (b), nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{Gc_1}{A} + u_x, \\ q = \dfrac{Gc_2}{B} + u_y, \\ r = \dfrac{Gc_3}{C} + u_z, \end{array}\right\} \qquad (c)$$

puis ces dernières valeurs dans les équations différentielles (H′) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dc_1}{dt} + G\left(\dfrac{1}{B} - \dfrac{1}{C}\right)c_2c_3 - u_zc_2 + u_yc_3 = 0, \\ \dfrac{dc_2}{dt} + G\left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{A}\right)c_3c_1 - u_xc_3 + u_zc_1 = 0, \\ \dfrac{dc_3}{dt} + G\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)c_1c_2 - u_yc_1 + u_xc_2 = 0; \end{array}\right\} \qquad (H'')$$

ces dernières équations admettent l'intégrale des aires

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$$

équation qui peut remplacer l'une d'elles, la troisième par exemple. Les deux premières peuvent s'écrire (*) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dc_1}{dt} + \mathrm{P}c_2 = -u_y c_3, \\ \dfrac{dc_2}{dt} - \mathrm{Q}c_1 = +u_x c_3, \end{array}\right\} \quad (\mathrm{H}''')$$

si l'on pose

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{P} = \dfrac{G}{C}\dfrac{C-B}{B}c_3 - u_z, \\ \mathrm{Q} = \dfrac{G}{C}\dfrac{C-A}{A}c_3 - u_z. \end{array}\right\} \quad (d)$$

Nous allons montrer que les quantités P, Q sont très sensiblement constantes. Tout d'abord l'angle zOG atteint à peine quelques dixièmes de seconde (**) ; par suite, nous pouvons poser sans erreur sensible :

$$c_3 = 1$$

et aussi

$$G = C\omega,$$

ω désignant la rotation moyenne de la Terre.

Les expressions de P, Q s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{P} = \dfrac{C-B}{B}\omega - u_x, \\ \mathrm{Q} = \dfrac{C-A}{A}\omega - u_x, \end{array}\right\} \quad (e)$$

(*) Voyez HELMERT, *Die Math. und phys. Th. der höh. Geodäsie*, 1884, t II, p. 414.

(**) Voyez l'Introduction.

et les équations différentielles (H''') :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dc_1}{dt} + \mathrm{P}c_2 = -u_{y_0} \\ \dfrac{dc_2}{dt} - \mathrm{Q}c_1 = +u_{x_0} \end{array}\right\} \quad (\mathrm{H}^{\mathrm{IV}})$$

Les cosinus c_1, c_2 peuvent être considérés comme des petites quantités du premier ordre ; dans les produits $\mathrm{P}c_2$, $\mathrm{Q}c_1$ nous négligerons les quantités du second ordre, ce qui revient à *faire abstraction des termes du premier ordre* entrant dans P et Q. Nous supposons que les moments d'inertie équatoriaux A_0, B_0 de la charpente rigide de la Terre sont égaux :

$$A_0 = B_0.$$

Les moments d'inertie principaux A, B de l'ensemble sont variables ; mais nous pouvons écrire au degré d'approximation voulu

$$\frac{C - A}{A} = \frac{C_0 - A_0}{A_0}.$$

En effet, en désignant par δA_0, δC_0 les différences $A - A$ $C - C_0$, nous avons

$$\frac{C - A}{A} = \frac{(C_0 - A_0) + (\delta C_0 - \delta A_0)}{A_0 + \delta A_0} = \frac{\dfrac{C_0 - A_0}{A_0}}{1 + \dfrac{\delta A_0}{A_0}} + \frac{\delta C_0 - \delta A_0}{A_0 + \delta A_0}$$

$$= \left(\frac{C_0 - A_0}{A_0} - \frac{C_0 - A_0}{A_0}\frac{\delta A_0}{A_0} + \dots\right) + \frac{\delta C_0 - \delta A_0}{A_0 + \delta A_0} = \frac{C_0 - A_0}{A_0},$$

en négligeant les termes du premier ordre (*).

(*) Les différences δA_0, δB_0, sont du même ordre que les petites masses m et celles-ci sont supposées être du premier ordre.

De la même façon,

$$\frac{C-B}{B} = \frac{C_0 - A_0}{A_0}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$P = Q = \frac{C_0 - A_0}{A_0}\omega - u_z = \nu - u_z,$$

ν étant la vitesse de rotation eulérienne (*).

Les équations du mouvement se mettent alors sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} + (\nu - u_z)c_2 &= -u_y, \\ \frac{dc_2}{dt} - (\nu - u_z)c_1 &= +u_x. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

En général, les vitesses de déviation u_x, u_y, u_z, et par suite le coefficient $P = Q = \nu - u_z$, sont des fonctions du temps.

Cependant, dans la plupart des cas relatifs à la Terre, on peut les supposer constantes : toutes les trois très petites s'il s'agit de déplacements séculaires (**); les deux premières très petites et la troisième de grandeur finie s'il s'agit de déplacements relativement rapides (comme ceux des marées) (***). Dans cette hypothèse

$$P = Q = \nu - u_z = c^{te} \equiv \mu$$

(*) Voyez l'Introduction.

(**) Voyez Tisserand, *op.* et *lib. cit.*, pp. 527 et 530, et Schwahn, *op. cit.*, § 5.

(***) Voyez Radau, *Bull. astr.*, t. VII, 1890, p. 354, et Helmert, *op.* et *lib. cit.*, p. 415.

et les équations différentielles (1) s'écrivent simplement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dc_1}{dt} + \mu c_2 = -u_y, \\ \dfrac{dc_2}{dt} - \mu c_1 = +u_x. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Additionnons ces deux équations après les avoir multipliées respectivement par 1 et i ; nous obtenons, en introduisant la variable complexe : $c = c_1 + ic_2$,

$$\frac{d(c_1 + ic_2)}{dt} - i\mu(c_1 + ic_2) = -u_y + iu_x,$$

ou

$$\frac{dc}{dt} - i\mu \cdot c = -u_y + iu_x. \quad (3)$$

Si le second membre était nul, l'intégrale générale serait

$$c = \mathrm{K}e^{i\mu t}, \quad (4)$$

K étant une constante arbitraire. Pour obtenir celle de l'équation complète, considérons K comme une fonction et substituons l'expression (4) dans (3) ; alors il vient

$$e^{i\mu t}\frac{d\mathrm{K}}{dt} = -u_y + iu_x,$$

$$\frac{d\mathrm{K}}{dt} = (-u_y + iu_x)e^{-i\mu t},$$

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{(-i\mu)}u_y \cdot e^{-i\mu t} + \frac{i}{(-i\mu)}u_x \cdot e^{i\mu t} + \mathrm{K}',$$

K′ étant une véritable constante. Alors

$$c = \mathrm{K}e^{i\mu t} = \mathrm{K}'e^{i\mu t} - \frac{iu_y}{\mu} - \frac{u_x}{\mu},$$

et, en séparant les parties réelles des imaginaires pures,

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = S\cos(\mu t + \tau) - \dfrac{u_x}{\mu}, \\ \\ c_2 = S\sin(\mu t + \tau) - \dfrac{u_y}{\mu}; \end{array}\right. \quad (5)$$

dans ces équations S et τ sont constants et choisis de manière à satisfaire à la relation

$$Se^{i\tau} = K'$$

tout en étant réels.

c_1, c_2 représentent les coordonnées [par rapport aux axes C_0x, C_0y menés parallèlement à Ox, Oy par le pôle d'inertie C_0 (*)] du pôle G_0 et sensiblement aussi celles du pôle I_0, intersection de l'axe de rotation OI avec la sphère ayant O pour centre et l'unité de longueur pour rayon.

Les équations (5) prouvent que le pôle de rotation I_0 décrit une circonférence, d'un mouvement uniforme ayant pour vitesse angulaire μ, une circonférence ayant pour centre le point I_0' de coordonnées $-\frac{u_x}{\mu}$, $-\frac{u_y}{\mu}$. Ce point est fixe par rapport aux axes C_0x, C_0y parallèles aux axes principaux Ox, Oy : sa distance à C_0 est $\frac{1}{\mu}\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ et son argument $\operatorname{arctg}\left(\frac{u_y}{u_x}\right)$; son déplacement est donc lié à celui du pôle d'inertie C_0. Nous avons appris, dans le paragraphe précédent, à calculer le déplacement de ce dernier pôle dû à telle ou telle influence; par suite nous connaîtrons l'action qu'une action géologique, hydrologique ou météorologique exerce sur le mouvement du pôle de rotation. Si nous supposons que les axes d'inertie coïncident avec les axes moyens à l'instant $t = 0$, leurs déplacements seront donnés

(*) C_0 est l'intersection de OG avec la sphère de rayon 1.

par les formules (6) du paragraphe 1, et leurs vitesses de déviation seront alors :

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = \dfrac{U_x}{\Delta t}, \\ u_y = \dfrac{U_y}{\Delta t}, \\ u_z = \dfrac{U_z}{\Delta t}. \end{array}\right\}$$

Dans ce qui précède nous avons supposé $u_x = C^{te}$, $u_y = C^{te}$, $u_z = C^{te}$, c'est-à-dire que nous avons admis que les axes principaux d'inertie $Oxyz$ se déplaçaient simplement d'une manière uniforme par rapport aux axes moyens $O\xi\eta\zeta$ fixes dans le globe.

Ainsi, dans cette hypothèse, le point I'_0 décrit un arc de grand cercle à la surface de la sphère, et par conséquent le point I_0 décrit une cycloïde proprement dite, allongée ou raccourcie (*). Il est clair que le mouvement de I_0 autour de I'_0 n'est autre chose que le mouvement eulérien, comme on le voit immédiatement en rapportant le mouvement de I_0 à des axes I'_0x', I'_0y' parallèles à chaque instant aux axes C_0x, C_0y (tournant uniformément avec la vitesse de rotation constante u_z)

* * *

Si, au lieu de changements séculaires dans la position des petites masses m, il se produit des *déplacements brusques*, les composantes u_x, u_y n'auront plus des valeurs constantes. On pourra considérer leurs valeurs comme nulles, excepté pendant l'instant très court Δt_0 que durent ces déplacements, durant lequel elles auront des valeurs très grandes (**).

(*) Ou plutôt la projection d'une telle courbe, à partir de O, sur la sphère. F. Tisserand, *op.* et *lib. cit.*, p. 531; P. Schwahn, *op. cit.*, § 5; J.-V. Schiaparelli, F.-R. Helmert, etc., *op. cit.*, et aussi E. Hill, *Elementary discussion on the influence of the geological changes on the Earth's axis of rotation*. (Proceedings of the R. Soc., Cambridge, t. III, 1878, pp. 161 et suiv.: Nature, Paris, 1878).

(**) Voyez Helmert, *op.* et *lib. cit.*, pp. 416-417; Schwahn, *op. cit.*, § 5; Tisserand, *op.* et *lib. cit*, p. 532.

Si nous désignons par K_{t_0} la valeur que possède la fonction K jusqu'à ce qu'ait lieu, à l'instant t_0, le phénomène brusque (durant Δt_0), nous aurons à l'instant $t_0 + \Delta t_0$ et aux suivants, s'il ne se produit plus d'autre perturbation de même genre,

$$K = K_{t_0} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} (-u_y + iu_x)\, e^{-i\mu t}\, dt, \qquad (6)$$

l'intégration ne s'étendant évidemment qu'à la durée du phénomène; cette expression peut encore s'écrire :

$$K = K_{t_0} + e^{-i\mu t_1} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} (-u_y + iu_x)\, dt,$$

t_1 désignant une valeur de t comprise entre t_0 et $t_0 + \Delta t_0$: nous le voyons en appliquant le *théorème de la moyenne* à (6) [en supposant u_x, u_y continus dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \Delta t_0)$].

Comme Δt_0 est très court, nous pouvons écrire sans erreur sensible

$$K = K_{t_0} + e^{-i\mu t_0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} (-u_y + iu_x)\, dt.$$

Ainsi le seul effet que peut produire un déplacement brusque de masse est de modifier la valeur de la constante eulérienne K : sitôt que le déplacement a cessé, le mouvement eulérien du pôle de rotation I autour du pôle d'inertie C continue avec la même vitesse de rotation : *la seule chose qui ait changé est l'angle d'ouverture* COI *du cône eulérien.* Ainsi les déplacements brusques se distinguent surtout des changements séculaires en ce qu'ils apportent des variations dans l'angle que font entre eux l'axe d'inertie polaire avec l'axe de rotation (*). Le pôle de rotation I_0 ne s'écarte pas du pôle G_0 de l'axe du couple des quantités de mouvement (**).

(*) Cf. SCHWAHN. *op. cit.*, § 5.

(**) Voyez TISSERAND, *op.* et *lib. cit.*, p. 532; HELMERT, *op.* et *lib. cit.*, p. 416.

* * *

Comme on a pu s'en apercevoir dans ce qui précède, le choix d'axes de référence $Oxyz$ *mobiles dans le globe* complique la question. Il est bien plus simple de rapporter le mouvement des pôles à des axes *fixes* dans la Terre.

Prenons, comme F.-R. Helmert (*) et A. Sommerfeld (**), pour axes de référence, fixes dans le globe, $Oxyz$ et $O\xi\eta\zeta$ (coïncidents) le système trirectangle formé par les axes principaux d'inertie au temps initial t_0; aux instants suivants ces axes ne seront évidemment plus les axes principaux du système formé par la charpente rigide et les petites masses mobiles.

Nous avons alors à poser

$$p = \omega_x, \quad q = \omega_y, \quad r = \omega_z;$$

$$\left\{\begin{array}{l} A = A_0 + A_1, \\ B = A_0 + B_1, \\ C = C_0 + C_1; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} D = D_1, \\ E = E_1, \\ F = F_1; \end{array}\right.$$

A_0, C_0 désignant les moments d'inertie principaux de la charpente; A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 représentant les moments et produits d'inertie (variables) des petites masses.

Les équations différentielles du mouvement prennent alors la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}[\sigma_x + (A_0 + A_1)p - F_1 q - E_1 r] \\ \qquad + q[\sigma_z - E_1 p - D_1 q + (C_0 + C_1) r] \\ \qquad - r[\sigma_y - F_1 p + (A_0 + B_1) q - D_1 r] = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \qquad (7)$$

(*) *Op.* et *lib. cit.*, 1884, pp. 423 et suiv. Voyez aussi *Astronomische Nachr.*, 1891, n° 3014.

(**) *Op.* et *lib. cit.*, 1903, pp. 716 et suiv.

Nous pouvons simplifier les expressions de f, g, h entrant dans ces équations; en effet, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 sont du premier ordre (même ordre que m), et p, q peuvent être supposés *a priori* du même ordre qu'eux. Il est permis alors de négliger les produits et carrés de ces quantités. Les équations (7) s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt} + \frac{C_0 - A_0}{A_0} rq + \frac{1}{A_0}\left(\frac{d\sigma_x}{dt} + q\sigma_z - r\sigma_y\right) \\
&\quad + \frac{1}{A_0}\left(D_1 r^2 - E_1 \frac{dr}{dt} - r\frac{dE_1}{dt}\right) = 0, \\
&\frac{dq}{dt} - \frac{C_0 - A_0}{A_0} rp + \frac{1}{A_0}\left(\frac{d\sigma_y}{dt} + r\sigma_x - p\sigma_z\right) \\
&\quad + \frac{1}{A_0}\left(-E_1 r^2 - D_1 \frac{dr}{dt} - r\frac{dD_1}{dt}\right) = 0, \\
&\frac{dr}{dt} + \frac{1}{C_0}\left(\frac{d\sigma_z}{dt} + p\sigma_y - q\sigma_x\right) \\
&\quad + \frac{1}{C_0}\left(C_1 \frac{dr}{dt} + r\frac{dC_1}{dt}\right) = 0.
\end{aligned}\right. \qquad (8)$$

Les derniers termes des premiers membres de ces équations sont ceux introduits par l'*influence indirecte* des transports de masses (*); σ_x, σ_y σ_z sont encore du premier ordre, en sorte que la troisième équation (8) donne, en négligeant les termes du second ordre,

$$\frac{dr}{dt}\left(1 + \frac{C_1}{C_0}\right) + \frac{1}{C_0}\left(\frac{d\sigma_z}{dt} + r\frac{dC_1}{dt}\right) = 0$$

ou encore

$$\frac{dr}{dt} + \frac{1}{C_0 + C_1}\frac{dC_1}{dt} r + \frac{1}{C_0 + C_1}\frac{d\sigma_z}{dt} = 0,$$

(*) Comparez les équations (8) aux équations (F'') du litt. *a*.

dont l'intégrale est

$$r = n,$$

si l'on néglige les termes du premier ordre, ce qui est permis au moins pour la substitution de la valeur de r dans les deux premières équations, puisque r n'y entre que multiplié par des quantités du premier ordre au moins.

En posant encore $\frac{C_0 - A_0}{A_0} n = \nu$, nous aurons pour ces deux premières équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \nu q + \dfrac{1}{A_0}\left(\dfrac{d\sigma_x}{dt} - n\sigma_y\right) + \dfrac{1}{A_0}\left(D_1 n^2 - \dfrac{dE_1}{dt} n\right) = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \nu p + \dfrac{1}{A_0}\left(\dfrac{d\sigma_y}{dt} + n\sigma_x\right) + \dfrac{1}{A_0}\left(-E_1 n^2 - \dfrac{dD_1}{dt} n\right) = 0. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Ces deux équations tiennent compte en même temps de l'influence directe (troisièmes termes) et de l'influence indirecte (quatrièmes termes). Nous allons voir, par un exemple, que pour la Terre *l'influence directe de transports de masse est tout à fait insignifiante vis-à-vis de leur influence indirecte* (*). A cette fin nous n'avons qu'à montrer que σ_x, σ_y sont négligeables vis-à-vis de nE_1, nD_1. Un mouvement elliptique simplement périodique d'une petite masse m autour de Oz peut être donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R_1 \cos \mu t, \\ y = R_2 \sin \mu t, \\ z = l, \end{array} \right\}$$

R_1, R_2, l et μ étant constants. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = myz = mR_2 l \sin \mu t, \\ E_1 = mzx = mR_1 l \cos \mu t, \\ \sigma_x = m\left(\dfrac{dz}{dt} y - \dfrac{dy}{dt} z\right) = -mR_2 l\mu \cos \mu t, \\ \sigma_y = m\left(\dfrac{dx}{dt} z - \dfrac{dz}{dt} x\right) = -mR_1 l\mu \sin \mu t, \end{array} \right\}$$

(*) Voyez A. Sommerfeld, *op.* et *lib cit.*, p. 718.

puis

$$\frac{\sigma_x}{n\mathrm{E}_1} = -\frac{\mu}{n}\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}, \qquad \frac{\sigma_y}{n\mathrm{D}_1} = -\frac{\mu}{n}\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_2}.$$

Comme nous l'avons dit plus haut (*), les seuls transports qui puissent avoir une influence directe *notable* sont ceux dont la période est voisine de la période eulérienne ; tels sont par exemple les déplacements *annuels* de cause météorologique. Dans ce cas $\frac{\mu}{n}$ vaut environ $\frac{1}{305}$ [ou $\frac{1}{427}$ (**)], par exemple $\frac{1}{366}$ pour les phénomènes annuels. Si R_1 et R_2 sont de même ordre, on voit que σ_x, σ_y sont tout à fait négligeables devant $n\mathrm{E}_1$, $n\mathrm{D}_1$.

On verrait facilement que si x, y, z étaient données par des séries de Fourier, la même conclusion subsisterait : *pour les transports lents, tels que ceux dont il vient d'être question, l'influence directe serait insignifiante à côté de l'influence indirecte; tandis que pour les transports rapides, les deux influences seraient insensibles ;* l'influence directe ne pourrait devenir notable que si les déplacements de masses s'effectuaient d'une façon brusque (***).

Nous négligerons donc dorénavant l'influence directe, qui ne semble pas, au moins pour les phénomènes actuels, être capable d'introduire des perturbations sensibles dans la rotation de la Terre. En conséquence, nous écrirons les équations différentielles du mouvement sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \varkappa q + \dfrac{1}{A_0}\left(\mathrm{D}_1 n^2 - \dfrac{d\mathrm{E}_1}{dt}n\right) = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \varkappa p - \dfrac{1}{A_0}\left(\mathrm{E}_1 n^2 + \dfrac{d\mathrm{D}_1}{dt}n\right) = 0, \end{array}\right\} \quad (10)$$

(*) Voyez litt. *a*.

(**) Il est bien clair que les conclusions sont encore valides pour le cas d'un globe faiblement élastique. (Cf. SOMMERFELD. *op.* et *lib. cit*, p. 713).

(***) Voyez SOMMERFELD, *op.* et *lib. cit.*, p. 719.

En calculant $\frac{dE_1}{dt}$, $\frac{dD_1}{dt}$ dans un cas particulier, par exemple dans le cas envisagé ci-dessus, nous verrions encore que les rapports de ces quantités à nD_1, nE_1 sont encore de l'ordre de $\frac{\mu}{n}$, c'est-à-dire très petits; en d'autres termes, nous pouvons encore négliger $\frac{dE_1}{dt}$ vis-à-vis de nD_1 et $\frac{dD_1}{dt}$ vis-à-vis de nE_1. Nos équations (10) s'écriront alors sous la forme très simple:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \nu q + \dfrac{n^2}{A_0} D_1 = 0, \\ \dfrac{dq}{dt} - \nu p - \dfrac{n^2}{A_0} E_1 = 0. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Remarquons encore que $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$ sont les coordonnées x, y, par rapport aux axes C_0x, C_0y (menés par le pôle fixe C_0 (*) parallèlement aux axes fixes Ox, Oy), du pôle de rotation I. Si nous voulons introduire dans (11) les coordonnées X, Y du pôle d'inertie C instantané, nous n'avons qu'à faire usage des formules (6″) du paragraphe 1 en remplaçant U_x par $-Y$, U_y par X (**), ∂D par D_1, ∂E par E_1 et en supposant $C - A$ sensiblement égal à $C_0 - A_0$; alors

$$\left\{\begin{array}{l} X = -\dfrac{E_1}{C_0 - A_0}, \\ Y = -\dfrac{D_1}{C_0 - A_0}, \end{array}\right\} \quad (12)$$

et en remplaçant, dans les équations (11), D_1, E_1 par leurs valeurs tirées de (12), nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\nu y - \dfrac{n}{A_0}[-(C_0 - A_0)Y] = -\nu(y - Y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \nu x + \dfrac{n}{A_0}[-(C_0 - A_0)X] = \nu(x - X). \end{array}\right\} \quad (13)$$

(*) Intersection de l'axe Oz fixe dans le globe avec la sphère de centre O et de rayon 1.

(**) Car la rotation U_y autour de Oy produit le déplacement X suivant Ox, et la rotation U_x autour de Ox détermine le déplacement $-Y$ suivant Oy.

Ces équations expriment simplement que le pôle de rotation I (x, y) *tourne à chaque instant autour du pôle d'inertie C* (X, Y) *avec la vitesse angulaire eulérienne* ν (*).

§ 3. — *Applications diverses ; « multiplication » de R. Radau.*

Les équations (2) de W. Thomson ont été appliquées par R. Radau; les autres géomètres ont préféré se servir des équations (13), qui sont au fond plus intuitives. Il sont arrivés, le premier aussi bien que les autres, à des conclusions fort intéressantes, dont nous expliquerons ici les principales.

Tout d'abord R. Radau, reprenant dans plusieurs articles (**) certaines considérations de Helmert, suppose que sous l'action d'un phénomène (tel que celui des marées) le pôle d'inertie C se trouve écarté de sa position initiale C_0 d'une quantité

$$c = c_0 \sin mt,$$

c_0 et m étant deux constantes, suivant le méridien opposé à celui passant par l'axe principal d'inertie variable Oy (***).

En premier lieu, il imagine que les axes principaux Ox, Oy tournent autour du troisième Oz avec la vitesse constante u_z : alors le pôle d'inertie C tourne uniformément autour de C_0.

Il est aisé de voir, par une simple construction géométrique,

---

(*) Voyez Helmert, *op.* et *lib. cit.*, chap. V, et Sommerfeld, *op.* et *lib. cit.*, p. 719. Consultez aussi *Astronomische Nachr.*, 1891, n° 3014, et *Bulletin astr.*, t. VIII, 1891, p. 92.

(**) F. Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, t. II, 1891, p. 536; *Bulletin astronomique*, t. VII, septembre 1890, p. 352; *Comptes rendus*, Paris, t CI, octobre 1890, p. 558. Nous avons changé l'orientation de ses axes pour nous rapprocher de ce qui précède.

(***) Dirigé vers la Lune dans le cas des marées.

que les autres vitesses de déviation u_x, u_y sont liées à c par les relations (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y = -cu_z, \\ u_x = -\dfrac{dc}{dt}, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = -mc_0 \cos mt, \\ u_y = -u_z \,.\, c_0 \sin mt. \end{array} \right.$$

Les équations (2) de W. Thomson deviennent alors ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dc_1}{dt} + \mu c_2 = u_z \,.\, c_0 \sin mt, \\ \dfrac{dc_2}{dt} - \mu c_1 = -mc_0 \cos mt, \end{array} \right.$$

où $\mu = \nu - u_z$. Les solutions (5) ne sont plus applicables, car u_x et u_y sont variables. En multipliant ces équations par 1 et i et en les additionnant, nous obtenons

$$\frac{d(c_1 + ic_2)}{dt} - i\mu(c_1 + ic_2) = u_z c_0 \left(\sin mt - i\frac{m}{u_z}\cos mt\right).$$

La solution de l'équation, si le second membre était nul, serait

$$c_1 + ic_2 = \mathrm{K}e^{i\mu t};$$

en employant la méthode de la variation des constantes arbitraires, on a pour déterminer la fonction K :

$$\frac{d\mathrm{K}}{dt} = u_z c_0 \left(\sin mt - i\frac{m}{u_z}\cos mt\right)e^{-i\mu t},$$

(*) A vrai dire Radau, en suivant Helmert (*op.* et *lib. cit.*, p. 424), avait d'abord posé : $u_z = 0$; mais il est plus juste de faire $u_x = -\dfrac{dc}{dt}$, comme il l'a reconnu dans la suite.

d'où l'on tire

$$K = K' + u_z c_0 \left\{ \int e^{-i\mu t} \sin mt\, dt - i \frac{m}{u_z} \int e^{-i\mu t} \cos mt\, dt \right\};$$

puis en effectuant, en substituant dans

$$c_1 + ic_2 = Ke^{i\mu t}$$

et en séparant les parties réelles des imaginaires, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} x = S \cos(\mu t + \tau) + \dfrac{m(\mu + u_z)}{\mu^2 - m^2} c_0 \cos mt, \\ y = S \sin(\mu t + \tau) + \dfrac{m^2 + \mu u_z}{\mu^2 - m^2} c_0 \sin mt, \end{array} \right\} \quad (1)$$

où l'on a remplacé les lettres c_1 et c_2 par x et y.

Telles sont les équations du mouvement du pôle instantané I (x, y).

Si nous désignons par

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{m(\mu + u_z)}{\mu^2 - m^2} c_0 \cos mt, \\ y_0 = \dfrac{m^2 + \mu u_z}{\mu^2 - m^2} c_0 \sin mt, \end{array} \right\} \quad (2)$$

les coordonnées d'un point I_0, que nous pouvons appeler *pôle moyen de rotation*, nous voyons que *le mouvement de I autour du pôle d'inertie C est épicycloïdal et se compose de deux autres mouvements :*

1° *Mouvement circulaire eulérien (ou chandlérien) de I autour du pôle moyen* I_0 ;

2° *Mouvement elliptique de* I_0 *autour de C.*

On voit immédiatement que, *si* m *est voisin de* μ, les coefficients des valeurs de x_0 et y_0 peuvent prendre des valeurs notables, beaucoup supérieures à l'amplitude maxima c_0 du pôle d'inertie. C'est en cela que consiste la « *multiplication* » trouvée

par Radau (*) (phénomène analogue à ceux des *résonances* en Acoustique).

Si $m = \mu$, les formules (1) et (2) deviennent illusoires ; mais il est facile de voir que les solutions ne se présentent plus sous la même forme, mais contiennent des termes

$$t \sin \mu t, \qquad t \cos \mu t;$$

le déplacement est alors *séculaire* (**).

Si l'on veut, avec Radau, étudier l'influence de la marée lunaire sur le déplacement du pôle, on devra faire évidemment

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \omega = -2\pi \text{ par jour sidéral}, \\ m = \dfrac{\omega}{27}, \\ u_2 = -\dfrac{30}{31}\omega, \\ \nu = \dfrac{\omega}{305}, \\ \mu = \nu - u_2 = \dfrac{9181}{9455}\omega. \end{array} \right.$$

Le mouvement du pôle moyen I_0 est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0{,}00016\, c_0 \cos mt, \\ y_0 = -0{,}995\, c_0 \sin mt. \end{array} \right.$$

Nous avons vu, au paragraphe 1, que le déplacement maximum c_0 du pôle d'inertie C est toujours inférieur, en valeur absolue, à une seconde d'arc ; l'écart entre C et I_0 est alors tout à fait né-

(*) Voyez Radau, Newcomb, Helmert, Spitaler. Grabowski, Sommerfeld, *op. cit.*

(**) Cf. L. Picart, *op. cit.*, 1897, § 16, et A. Sommerfeld, *op.* et *lib. cit.*, p. 722.

gligeable (*) ; ce qui se comprend aisément puisque la période du phénomène est très différente de la période eulérienne.

Si, au contraire, il s'agit d'un phénomène local et annuel,

$$\left\{\begin{array}{l} u_z = 0, \\ \mu = \nu = \dfrac{\omega}{305}, \\ m = \dfrac{\omega}{366} = \dfrac{5}{6}\nu, \end{array}\right.$$

et le mouvement du pôle moyen I_0 est

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\dfrac{5}{6}\nu^2}{\nu^2 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \nu^2} c_0 \cos mt = \dfrac{30}{11} c_0 \cos mt, \\ y_0 = \dfrac{\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \nu^2}{\nu^2 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 \nu^2} c_0 \sin mt = \dfrac{25}{11} c_0 \sin mt, \end{array}\right.$$

et l'écart entre I_0 et C est

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 - X = \dfrac{30}{11} c_0 \cos mt = 2{,}7\, c_0 \cos mt, \\ y_0 - Y = \dfrac{25}{11} c_0 \sin mt - (-c_0 \sin mt) = 3{,}3\, c_0 \sin mt. \end{array}\right.$$

Ainsi *le pôle moyen de rotation I_0 décrit autour de C une ellipse dont les axes sont respectivement égaux à 2,7 et 3,3 fois la déviation maxima de C.*

La plus grande élongation entre deux positions du pôle de rotation I se composera du grand axe $6{,}6\,|c_0|$ de l'ellipse aug-

---

(*) Puisque les coordonnées de C sont

$$X = 0,\ Y = -c = -c_0 \sin mt.$$

Voyez R. Radau, *op. cit.*

menté de deux fois le rayon S du cercle eulérien, soit $2S + 6{,}6|c_0|$. Pour que cette distance pût atteindre $0'',5$ il suffirait, si $S = 0'',15$, de supposer $|c_0| = 0'',03$, ce qui pourrait très bien être produit par un phénomène actuel, par exemple par le transport d'une masse d'eau ou d'air d'un point du globe à un autre. La distance pourrait ensuite descendre jusqu'à $0'',30 - (0'',03 \times 5{,}4) = 0'',14$.

F. R. Helmert, continuant l'étude de Radau, la développe et la complète (*)

Il emploie des axes fixes dans le globe et obtient ainsi les équations différentielles (13) du paragraphe précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\nu(y - Y), \\ \dfrac{dy}{dt} = +\nu(x - X), \end{array} \right\} \quad (3)$$

où x, y désignent les coordonnées du pôle de rotation I, tandis que X, Y représentent celles du pôle d'inertie C. En supposant que le pôle d'inertie C se déplace encore suivant Oy (axes *fixes* dans le globe), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 0, \\ Y = c_0 \sin mt, \end{array} \right\}$$

puis pour équations du mouvement de I,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} + \nu y = \nu c_0 \sin mt, \\ \dfrac{dy}{dt} - \nu x = 0. \end{array} \right\}$$

(*) *Zur Erklärung der beobachteten Breitenänderungen.* (ASTR. NACHR., t. CXXVI, 1891, n° 3014.)

En intégrant ces équations par le moyen connu, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{S}\cos(\nu t + \tau) + \dfrac{m\nu}{\nu^2 - m^2} c_0 \cos mt, \\ \\ y = \mathrm{S}\sin(\nu t + \tau) + \dfrac{\nu^2}{\nu^2 - m^2} c_0 \sin mt. \end{array}\right\}$$

Le mouvement de I est encore épicycloïdal et se compose des deux mouvements simples :

1° Mouvement circulaire eulérien de I autour d'un pôle moyen I_0 de rotation;

2° Mouvement elliptique du pôle moyen I_0 autour du pôle d'inertie *moyen* (fixe dans le globe) C_0, donné par

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{m\nu}{\nu^2 - m^2} c_0 \cos mt, \\ \\ y_0 = \dfrac{\nu^2}{\nu^2 - m^2} c_0 \sin mt. \end{array}\right\}$$

Les mêmes remarques que plus haut peuvent être faites ici relativement à la *multiplication* des oscillations du pôle d'inertie C.

Helmert ne se borne pas, dans son Mémoire, à analyser et discuter ces résultats, analogues à ceux de Radau; mais il envisage aussi le cas où le mouvement du pôle d'inertie C n'est plus rectiligne, mais circulaire, elliptique ou composé de tels mouvements :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = \sum_i \mathrm{C}_i \cos imt + \sum_i \mathrm{S}_i \sin imt, \\ \mathrm{Y} = \sum_i \mathrm{C}'_i \cos imt + \sum_i \mathrm{S}_i \sin imt. \end{array}\right\}$$

Les conclusions auxquelles il parvient montrent que la multiplication des mouvements du pôle C, qui se retrouvent dans ceux de I, peut aussi bien se produire dans ces derniers cas que dans celui envisagé par Radau; en d'autres termes, qu'*une telle multiplication n'est pas caractéristique d'un déplacement rectiligne du pôle d'inertie, mais peut aussi avoir lieu quand ce dernier décrit*

toutes les variétés d'ellipses comprises entre la droite (cas limite où l'un des axes est nul) et la circonférence (cas limite où les deux axes sont égaux). Ainsi, si le mouvement du pôle d'inertie C est elliptique,

$$\left\{\begin{array}{l} X = a\cos(mt + n), \\ Y = b\sin(mt + n), \end{array}\right.$$

nous obtenons, en suivant la marche indiquée plusieurs fois, pour mouvement du pôle moyen I_0 de rotation,

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\nu^2 a + \nu m b}{\nu^2 - m^2}\cos(mt + n), \\ y_0 = \dfrac{\nu^2 b + \nu m a}{\nu^2 - m^2}\sin(mt + n). \end{array}\right.$$

Ce pôle décrit donc d'un mouvement uniforme, de même période $\frac{2\pi}{m}$ que celui de C (*), une ellipse homocentrique à celle de C, de mêmes directions axiales, mais de longueurs d'axes généralement différentes.

Si nous supposons par exemple, avec R. Spitaler (**), que ce mouvement elliptique du pôle d'inertie soit causé par un phénomène de période annuelle (tel que pourrait être la variation des pressions barométriques), nous devrons faire

$$m = \frac{\omega}{366}, \qquad \nu = \frac{\omega}{305}, \qquad \text{donc } m = \frac{5}{6}\nu,$$

et la multiplication pourra aller jusque 6 (en ce sens que le demi-grand axe de l'ellipse de I_0 est 6 fois aussi grand que l'os-

---

(*) Nous renvoyons au dernier article de HELMERT pour l'étude des cas particuliers, notamment pour la discussion du sens (direct ou rétrograde) du mouvement de I_0 autour de C_0.

(**) *Die Ursache der Breitenschwankungen.* (DENKSCHRIFTEN DER K. AKAD. D. WISS., Vienne, t. LXIV, 1897.)

cillation maxima du pôle d'inertie), puisque les équations de mouvement du pôle moyen I_0 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 6\,\dfrac{6a + 5b}{11}\cos(mt + n), \\ y_0 = 6\,\dfrac{6b + 5a}{11}\sin(mt + n). \end{array} \right\}$$

Si $b = 0$, on a,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{36}{11}\,a\cos(mt + n) = 3{,}3\,a\cos(mt + n), \\ y_0 = \dfrac{30}{11}\,a\sin(mt + n) = 2{,}7\,a\sin(mt + n). \end{array} \right\}$$

Si $b = a$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 6a\cos(mt + n), \\ y_0 = 6a\sin(mt + n). \end{array} \right\}$$

La multiplication est alors très considérable.

Si, au lieu de la vitesse eulérienne

$$\nu = \frac{\omega}{305},$$

nous considérons la vitesse chandlérienne

$$\nu = \frac{\omega}{427},$$

nous aurons

$$m = \frac{7}{6}\nu,$$

pour un phénomène annuel, puis

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\,6\,\dfrac{6a + 7b}{13}\cos(mt + n), \\ y_0 = -\,6\,\dfrac{6b + 7a}{13}\sin(mt + n). \end{array} \right\}$$

La multiplication peut encore atteindre 6. Le pôle moyen I_0 se trouve alors toujours du côté opposé au pôle d'inertie C, tandis que, dans le premier cas, il est du même côté. C'est une loi générale des phénomènes oscillatoires : suivant que $m < \nu$ ou $m > \nu$, on a l'un ou l'autre cas (*).

R. Spitaler a étudié (**), au moyen des cartes à lignes isobares, les déplacements du pôle d'inertie qui peuvent résulter des perturbations atmosphériques (***). En combinant géométriquement les déplacements du pôle C produits par 7 variations atmosphériques isolées, il a obtenu un écart de C de 0″,212 (dans la direction 75° de longitude) entre les positions de janvier et de juillet. Pour examiner si le mouvement de ce pôle est produit *uniquement* par les transports de masses d'air ou bien seulement *en partie* par eux, on peut suivre deux voies inverses :

1° La première, suivie par Spitaler, essaie de connaître directement, par les données d'observation, la trajectoire du pôle d'inertie C à la surface du globe, et calcule par les formules précédentes le mouvement du pôle de rotation I ; elle compare ensuite ce dernier avec celui déduit des observations astronomiques. Cette méthode a le défaut d'exiger la connaissance entière de la trajectoire de C au moyen d'estimations forcément grossières (vu l'absence de lignes isobares mensuelles sur les cartes).

2° La seconde, proposée par L. Grabowski (IV), prend pour mouvement du pôle de rotation I le mouvement observé, et déduit par le renversement des formules :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\nu^2 a + \nu m b}{\nu^2 - m^2}\cos(mt + n), \\ y_0 = \dfrac{\nu^2 b + \nu m a}{\nu^2 - m^2}\sin(mt + n), \end{array}\right\}$$

(*) Voyez SOMMERFIELD, *op.* et *lib. cit.*, p. 721.

(**) *Op. cit.*, 1897.

(***) Voyez le § 1.

(IV) *Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegungen.* (SITZUNGSBERICHTE DER K. AKAD. D. WISS., Vienne, 1898, t. CVII.)

soit, si l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{\nu^2 a + \nu m b}{\nu^2 - m^2}, \\ B = \dfrac{\nu^2 b + \nu m a}{\nu^2 - m^2}, \end{array} \right.$$

les expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} X = (A - \dfrac{m}{\nu} B) \cos (mt + n), \\ Y = (B - \dfrac{m}{\nu} A) \sin (mt + n). \end{array} \right.$$

Elle compare alors les positions du pôle d'inertie C, déduites de ces formules (pour certaines époques), à celles qu'on a pu déterminer directement.

En reprenant les nombres de Spitaler et supposant

$$m = \frac{\omega}{366}, \quad \nu = \frac{\omega}{427}, \quad \text{soit} \quad m = \frac{7}{6}\nu,$$

Grabowski pense que, pour expliquer les variations observées dans la position des pôles, il est nécessaire de considérer des déplacements autres que ceux de masses d'air, agissant simultanément avec ces derniers, mais perpendiculairement à leur ligne d'action (*).

Quoi qu'il en soit, R. Spitaler a repris la question (**) et a modifié ses chiffres. Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, il a trouvé pour le pôle d'inertie C les écarts suivants :

En janvier	0",055	dans la direction	100° Ouest	de Greenwich.
En juillet	0",041	»	68° Est	

(*) *Op. cit.*, 1898, § 5.

(**) *Die periodischen Luftmassenverschiebungen und ihr Einfluss auf die Lagenänderungen der Erdachse.* (PETERMANNS MITTEILUNGEN, 1901, n° 137.)

Le pôle d'inertie oscillerait donc à peu près dans des directions opposées et de grandeurs de même ordre; à ce qu'on peut supposer, le pôle C tournerait dans le sens rétrograde à la surface du globe; mais on n'est pas en état de déterminer sa trajectoire avec précision.

Le procédé de Grabowski est applicable ici. D'après les résultats de l'analyse harmonique des mouvements du pôle de rotation I [voyez par exemple ceux indiqués par Van de Sande Bakhuyzen en 1900 (*)], le pôle moyen I décrirait une ellipse dont le demi grand axe serait

$$A = 0''{,}104,$$

et le demi petit axe

$$B = 0''{,}044;$$

le grand axe étant dirigé vers le méridien de 19° Est. En prenant l'axe des x dirigé suivant ce grand axe et l'axe des y dirigé vers le méridien de 71° Ouest, nous obtiendrons pour le mouvement du pôle d'inertie

$$\left\{\begin{array}{l} X = (0''{,}104 - \frac{7}{6} \times 0''{,}044)\cos(mt + n), \\ Y = (0''{,}044 - \frac{7}{6} \times 0''{,}104)\sin(mt + n), \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} X = 0''{,}053\cos(mt + n), \\ Y = -0''{,}077\sin(mt + n). \end{array}\right.$$

Le pôle d'inertie décrirait donc dans le sens *inverse* une ellipse dont le grand et le petit axe coïncident en direction respectivement avec le petit et le grand axe de l'ellipse de I (**).

(*) *The motion of the Pole of the Earth according to the observations of the last years.* [Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, août 1900.]

(**) Voyez la figure dans Sommerfeld, *op.* et *lib. cit.*, p. 723.

En comparant les positions de C pour janvier et juillet avec celles exigées par les chiffres (donnés en dernier lieu par Spitaler), on reconnaît une assez grande concordance. Les différences qui existent entre ces positions peuvent provenir soit de l'ignorance où nous sommes de ce qui se passe pour les régions arctiques, soit du fait que peut-être d'autres phénomènes météorologiques agissent simultanément avec les premiers.

Ainsi *les perturbations ou plutôt les variations annuelles dans la répartition des masses atmosphériques peuvent très bien expliquer les oscillations (du pôle I) de seconde espèce*, c'est-à-dire les oscillations de période annuelle.

Les oscillations de troisième espèce, ne présentant pas apparemment de période, sont plus difficiles à expliquer. Il y a lieu de croire cependant qu'elles sont dues à des phénomènes courts, agissant quelque temps dans une direction, puis changeant rapidement de sens. Au reste, nous avons vu que les phénomènes brusques peuvent avoir une influence *directe* sensible.

QUATRIÈME PARTIE.

Influence de phénomènes jouant le rôle de résistances passives.

Après avoir mentionné, dans ce qui précède, les influences qui peuvent écarter le pôle de rotation I du pôle principal d'inertie C, il nous reste à dire un mot au sujet de certains phénomènes qui, en jouant le rôle de résistances passives, sont capables, au moins à la longue, de rapprocher I de C (*actions centripètes*).

Prenons des axes de référence $Oxyz$ fixes dans la partie rigide du globe. Soient encore f, g, h les moments résultants,

par rapport à ces axes, des quantités de mouvement absolu de l'ensemble. Si aucune force extérieure n'agit sur le globe,

$$f^2 + g^2 + h^2 = G^2, \quad (1)$$

intégrale des aires.

L'expression de la force vive totale absolue de l'ensemble est

$$2T = Ap^2 + Aq^2 + Cr^2, \quad (2)$$

A, B = A, C désignant les moments principaux, p, q, r les composantes de la rotation instantanée $\bar{o}$ de l'ensemble; à condition toutefois que les déplacements de masses ne soient pas capables d'amener des variations sensibles dans les moments d'inertie.

Puisque nous supposons notre ensemble assimilable à un corps rigide, nous pouvons encore écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} f = Ap, \\ g = Bq = Aq, \\ h = Cr. \end{array} \right\}$$

L'expression de la force vive devient :

$$2T = \frac{f^2 + g^2}{A} + \frac{h^2}{C}. \quad (3)$$

f, g, h sont les coordonnées du point G, extrémité du moment résultant (fixe dans l'espace) des quantités de mouvement absolu. Si nous nous plaçons à l'instant initial, G et 2T sont donnés : par suite le point G (f, g, h) doit se trouver sur l'intersection de la sphère

$$f^2 + g^2 + h^2 = G^2 \quad (1)$$

et de l'ellipsoïde allongé (puisque $C > A$) :

$$\frac{f^2 + g^2}{A} + \frac{h^2}{C} = 2T; \quad (3)$$

si 2T est suffisamment grand, l'ellipsoïde de révolution faiblement allongé (3) coupe la sphère en un parallèle d'un certain rayon ayant le pôle C pour centre. Ainsi le point G, à la surface du globe, se mouvra sur une circonférence.

Mais il existe des phénomènes *dissipateurs d'énergie mécanique* (*); au bout d'un certain temps 2T aura diminué d'une quantité notable : l'ellipsoïde (3), tout en restant homothétique à lui-même, sera devenu plus petit, et le rayon du cercle de G aura aussi diminué.

Lorsque 2T sera devenue égale à $\frac{G^2}{C}$, le pôle G devra coïncider avec le pôle d'inertie C, et il en sera de même pour le pôle de rotation I (**).

Ainsi, il est montré que *pour un corps assimilable à un corps rigide, l'influence de frottements internes est de tendre à rapprocher le pôle de rotation* I *du pôle d'inertie* C.

Mais existe-t-il des frottements internes? Sans aucun doute. Dans toutes les hypothèses géophysiques, on admet qu'au moins une partie du globe se trouve à l'état plastique (c'est-à-dire non parfaitement rigide), élastique ou non, et n'ayant pas une fluidité parfaite. Il s'ensuit que cette partie, ne se comportant pas comme un corps parfaitement rigide, suivra, avec une vitesse d'adaptation plus ou moins grande, les déplacements de l'axe de rotation dans le globe : or, cette adaptation ne se fera pas sans évoquer des frottements entre les particules, qui, forcément, absorberont de l'énergie mécanique et la transformeront en chaleur. Notre raisonnement précédent, tout en n'étant pas d'une rigueur absolue pour ce cas, nous montre cependant assez bien ce qui doit se passer.

Dans son célèbre Mémoire de 1877 (***), G.-H. Darwin a étudié

(*) Voyez *Encyclopädie der mathematischen Wisssenschaften*, t. IV, art. 15, n° 14.

(**) Voyez Sommerfeld, *op.* et *lib. cit.*, p. 730.

(***) *Influence of the geological changes...* (Philosophical Transactions, t CLXVII, 1877, §§ 4 et 5, pp. 280 et suiv.)

les relations de position qui existent entre les pôles d'inertie et de rotation, lorsqu'on suppose la Terre douée d'une certaine viscosité, au moins dans l'une de ses parties.

J.-V. Schiaparelli a également traité ce sujet dans son étude de l'influence des actions géologiques sur la rotation de la Terre (*). Enfin, V. Volterra (**) a cherché ce que devenait, dans cette hypothèse, l'influence des mouvements cycliques. Nous nous bornerons ici à traiter, par voie purement géométrique, les considérations de Darwin.

Nous supposerons que la vitesse d'écoulement des matières à l'intérieur du globe est très petite, de manière que nous puissions négliger l'*influence directe* de cet écoulement.

Darwin imagine que, sous l'influence d'actions géologiques, le pôle d'inertie C, qui coïncidait primitivement avec le pôle de rotation I, se déplace uniformément suivant un méridien C_0C avec la vitesse constante $\bar{u}$. Si la Terre était rigide, le pôle de rotation I décrirait une cycloïde proprement dite (***), dont la base de roulement serait le méridien C_0C : I tournerait avec la vitesse de rotation constante eulérienne ν autour de son centre instantané C. Mais comme par hypothèse *le globe est doué d'une certaine plasticité* (non élastique), les tensions provoquées par une rotation autour d'un axe OI ne coïncidant plus avec l'axe OC d'inertie, auront pour effet de faire fluer la matière visqueuse, de manière que l'axe OC se rapproche de l'axe OI. Cette tendance se manifestera d'autant mieux que l'écart CI sera plus grand; en d'autres termes, la vitesse qui sera communiquée de ce chef au pôle d'inertie C sera une fonction croissante de cet écart $\delta = \overline{CI}$.

(*) *De la rotation de la Terre sous l'influence des actions géologiques*, Saint-Pétersbourg, 1889, §§ 2 et 3.

(**) *Sur la théorie des variations de latitude.* (Acta Mathematica, t. XXII, 1898, chap. VI.)

(***) Voyez section *B*, litt. *b*, § 3 de la troisième partie. Il s'agit d'une vraie cycloïde, puisque C et I coïncidaient primitivement.

Admettons, avec Darwin (*) et Volterra (**), que cette vitesse soit *simplement proportionnelle à* δ, soit égale à $k\delta$, k étant une constante de même espèce qu'une vitesse angulaire.

Voici quelles sont alors les données du problème : I est animé de la vitesse linéaire eulérienne $\nu\delta$ (autour de son centre instantané C), qui est perpendiculaire à CI; le pôle C possède une vitesse de déviation u suivant le méridien C_0C' (***), et une vitesse d'adaptation $k\delta$ dirigée suivant CI. Il s'agit de déterminer le mouvement des deux pôles I et C.

De prime abord la question paraît compliquée. Mais on peut la simplifier en la transformant en un problème de mouvement relatif.

Pour cela nous communiquons, par la pensée, aux deux pôles C, I une vitesse $-\overline{u}$ dirigée suivant la parallèle à $C'C_0$ menée par chacun des pôles, et une vitesse $-\overline{k\delta}$ dirigée suivant IC : le mouvement relatif de I par rapport à C ne sera pas altéré; quant à C, il sera en repos absolu.

Le problème revient alors à celui-ci : déterminer le mouvement d'un point I animé de trois vitesses : $\nu\delta$ suivant une perpendiculaire à IC (sens direct), $k\delta$ suivant IC (centripète), u suivant IN (parallèle à $C'C_0$ menée par I). Dans ces expressions ν, k, u sont des constantes, tandis que δ varie (fig. 7).

Remarquons tout d'abord qu'en composant les deux premières vitesses, on obtient une vitesse partielle $\overline{IW} \equiv \overline{w}$ dont la grandeur numérique est $\sqrt{\nu^2 + k^2} \cdot \delta$ et dont l'inclinaison $\alpha \equiv$ WIC sur IC est constante; car $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\nu}{k}$.

En combinant, par la règle du parallélogramme, cette vitesse partielle $\overline{w}$ avec la vitesse constante $\overline{IN} = \overline{u}$, nous obtiendrons la vitesse totale

$$\overline{v} = \overline{w} + \overline{u} = \overline{IW} + \overline{IN} = \overline{IV}.$$

(*) *Op. cit.*, 1877, p. 282.

(**) *Op. cit.*, 1898, p. 347.

(***) C_0 est la position primitive de C. C' est la position vers laquelle C tendrait si le mouvement de I ne réagissait pas sur lui.

Menons par C une semi-droite CA faisant avec la parallèle CC'' (menée par C parallèlement à $C'C_0$) l'angle α; prenons sur sa direction un segment

$$l = \overline{CA} = \frac{u}{\sqrt{\nu^2 + k^2}};$$

joignons A à I et prolongeons AI jusqu'en L (au delà de I).

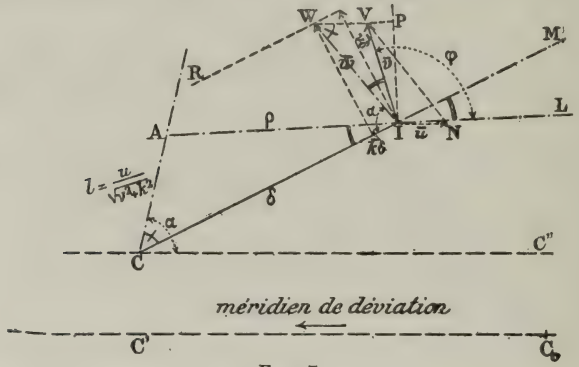


FIG. 7.

Remarquons que les deux angles VWI, ACI sont égaux. En effet, si nous menons WR parallèlement à IC, nous aurons la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}\text{Angle VWI} &= \text{VWR} - \text{IWR} = \text{NIC} - (180^\circ - \text{WIC}) \\ &= (180^\circ - \text{ICC''}) - (180^\circ - \text{WIC}) = \text{WIC} - \text{ICC''} \\ &= \text{ACC''} - \text{ICC''} = \text{ACI}.\end{aligned}$$

Cela posé, on voit immédiatement que les deux triangles VWI, ACI sont semblables comme ayant un angle égal VWI = ACI compris entre côtés proportionnels

$$\frac{\text{VW}}{\text{AC}} = \frac{u}{\dfrac{u}{\sqrt{\nu^2 + k^2}}} = \sqrt{\nu^2 + k^2} = \frac{\sqrt{\nu^2 + k^2}\,\delta}{\delta} = \frac{\text{WI}}{\text{CI}};$$

par suite ils sont équiangles, et il vient

$$\text{WIV} = \text{CIA} = \text{LIM}.$$

Évaluons l'angle φ que fait la direction de la vitesse totale $\bar{v}$ avec IL :

$$\varphi \equiv \text{LIV} = \text{LIM} + \text{MIV} = \text{WIV} + \text{VIM} = \text{WIM}$$
$$= 180^\circ - \alpha = \text{constante}.$$

Ainsi la direction de la vitesse $\bar{v}$, qui est celle de la tangente à la trajectoire relative de I, fait un angle constant avec le rayon vecteur AIL : en d'autres termes, I décrit une *spirale logarithmique* dont A est le point asymptote (*).

Comme α reste toujours compris entre 0 et 90°, quel que soit le degré de plasticité de la Terre, φ est compris entre 90° et 180°, c'est-à-dire que I parcourt la spirale de manière que les rayons vecteurs aillent en décroissant : c'est-à-dire que I *tourne indéfiniment autour de* A *en s'en rapprochant de plus en plus, mais sans pouvoir jamais l'atteindre.*

Il faut observer encore que *le rayon vecteur* $\rho = \text{AI}$ *tourne autour de* A *avec une vitesse angulaire constante.* En effet, cette vitesse ν' est mesurée, si on désigne par P la projection de V sur la perpendiculaire IP à AI en I, par

$$\nu' = \frac{\text{IP}}{\text{AI}} = \frac{v \sin\varphi}{\rho} = \frac{v}{\rho}\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{v}{\rho}\sin\alpha = \frac{v}{\rho}\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + k^2}}.$$

Comme dans les triangles semblables IVW, IAC on a

$$\frac{v}{\rho} = \frac{\text{IV}}{\text{IA}} = \frac{\text{VW}}{\text{AC}} = \frac{u}{\dfrac{u}{\sqrt{\nu^2 + k^2}}} = \sqrt{\nu^2 + k^2},$$

on obtient

$$\nu' = \sqrt{\nu^2 + k^2}\,\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + k^2}} = \nu = \text{constante}.$$

(*) Cf. DARWIN, *op. cit.*, 1877, p. 282.

Tel est le mouvement relatif de I autour de C, c'est-à-dire le mouvement que I prendrait dans un plan emporté par le pôle C dans son déplacement.

On peut remarquer que la spirale a des rayons vecteurs $\rho = AI$ décroissant d'autant plus rapidement que k est plus grand, c'est-à-dire que la matière du globe est plus fluide (puisque α est d'autant plus petit).

Si, au contraire, on suppose $k = 0$, on a

$$\alpha = 90^\circ, \quad \varphi = 90^\circ :$$

la spirale devient une circonférence, et l'on rentre dans le cas du globe rigide.

Si l'on suppose $u = 0$, les constructions précédentes deviennent illusoires (*) : mais on sait que, si les pôles I, C coïncident à l'instant initial et qu'aucune cause étrangère ne vienne déplacer C ($u = 0$), les deux pôles restent perpétuellement confondus.

Pour déterminer la trajectoire absolue du pôle I, il faut d'abord chercher celle du pôle d'inertie C.

On trouvera cette dernière en exprimant que le pôle C est animé de deux vitesses simultanées : l'une $\overline{u}$, constante en grandeur et direction, parallèle au méridien C_0C' de déviation, l'autre $\overline{w} = \overline{CW_1} = k\delta$ (fig. 8) dirigée suivant CI et proportionnelle à la distance variable δ; la loi de variation (en grandeur et direction) de cette vitesse nous est connue, puisque nous venons de déterminer le mouvement relatif de I par rapport à C. Comme $\overline{CI} = \overline{CA} + \overline{AI}$, c'est-à-dire

$$\overline{\delta} = \overline{l} + \overline{\rho},$$

la vitesse partielle $\overline{w} = \overline{k\delta}$ sera égale à

$$\overline{w} = \overline{kl} + \overline{k\rho}.$$

(*) Voyez cependant l'application pour $u = o$ (des raisonnements précédents) un peu plus bas.

La combinaison des deux vitesses (constantes en grandeur et direction) $\bar{u}$ suivant CU et $\bar{a} = \overline{CQ} = \overline{kl}$ donnera la partie constante en grandeur et direction

$$\bar{t} = \overline{CT}$$

de la vitesse absolue du pôle C. La partie variable

$$\bar{b} = \overline{QW_1} = \overline{CW_2} = \overline{k\rho}$$

de la vitesse absolue de $\bar{v}$ de C tourne uniformément autour de C et sa longueur, proportionnelle au rayon vecteur

$$\rho = AI$$

d'une spirale logarithmique, décroît proportionnellement à une exponentielle négative du temps.

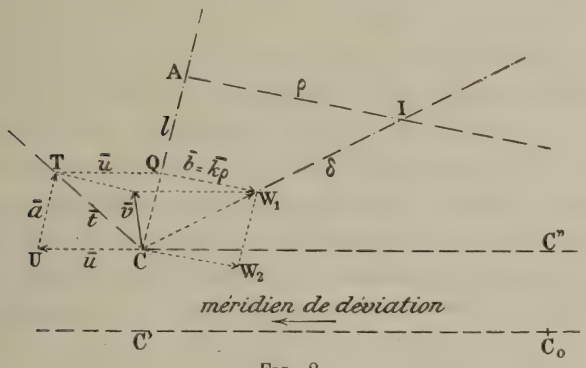


Fig. 8.

Si cette dernière longueur était constante, soit ρ_0, la vitesse absolue $\bar{v}$ de C se composerait de la vitesse $\bar{t}$ uniforme de translation et de la vitesse $k\rho_0$ (constante en grandeur et tournant uniformément autour de C), et par suite le mouvement de C serait cycloïdal. Comme cette longueur décroît avec le temps suivant la loi indiquée, on peut dire que *la trajectoire de C est*

une cycloïde dont la circonférence génératrice a un rayon décroissant exponentiellement avec le temps (*).

Le mouvement absolu de I à la surface du globe résultera de la combinaison des deux suivants :

1° Mouvement relatif spiraloïdal de I autour de C;

2° Mouvement absolu cycloïdal de C.

*
* *

Nous n'avons donné cet exemple qu'à titre de curiosité. On voit encore que l'écart entre C et I oscille entre certaines limites, mais tend à s'annuler. La viscosité supposée (au moins d'une partie de la Terre) amortit les oscillations.

Si nous supposons que le mouvement de I autour de C soit primitivement eulérien, c'est-à-dire qu'à l'instant initial la Terre soit rigide, puis, qu'à un certain moment entre en jeu l'action perturbatrice d'une viscosité au moins partielle, le raisonnement précédent tient encore (**). A coïncide avec C et l'on voit que la trajectoire relative de I autour de C est encore une *spirale logarithmique* ayant C pour point asymptote. I la parcourt uniformément (en ce sens que le rayon vecteur $\rho = \delta = CI$ tourne avec une vitesse angulaire constante autour de C). Pour déterminer le mouvement absolu de C, nous remarquerons que la vitesse $\overline{k\delta}$ dont C est animé, tourne uniformément autour de C et décroît suivant une exponentielle négative du temps; donc la trajectoire absolue de C est aussi une *spirale logarithmique*. Le mouvement absolu de I résulte de la combinaison de ces deux mouvements spiraloïdaux. On doit remarquer que I tend à s'approcher de C. Il y a encore une tendance à l'amortissement des oscillations.

(*) Cf. Darwin, *op. cit.*, p. 283. Voyez aussi S. Newcomb, *op. cit.*, 1892, p. 339. Comparez aussi H. Gyldén, *op. cit.* (Bull. Ac., Stockholm, 1878, n° 7.)

(**) Nous supposons qu'aucune action géologique étrangère n'intervienne, c'est-à-dire $u = o$.

*
* *

Outre l'existence de couches visqueuses (*), on peut encore citer comme actions passives le *frottement des marées :* marée luni-solaire ou marée eulérienne (c'est-à-dire celle causée par le déplacement eulérien du pôle I (**)].

Considérons d'abord l'action de la *marée luni-solaire* (***). Aux extrémités d'un diamètre de la Terre se produisent deux protubérances liquides, qui restent immobiles tandis que la Terre tourne sous elles; plus exactement ces protubérances se déplacent lentement avec la Lune. Par suite de la viscosité de l'eau il se produit un couple qui s'oppose à celui de rotation de la Terre. Si la Lune était rigoureusement dans le plan de l'équateur, l'axe du couple résistant coïnciderait avec celui de rotation et sa grandeur serait sensiblement proportionnelle à cette rotation. Nous supposerons que la résistance qu'offrent ces protubérances (vrais sabots de frein) à la rotation de la Terre est proportionnelle à la vitesse de rotation instantanée $\bar{o}$ (IV). Nous poserons donc :

$$\left\{\begin{array}{l} L = -Kp, \\ M = -Kq, \\ N = -Kr, \end{array}\right\}$$

K étant un coefficient constant positif, p, q, r les composantes de $\bar{o}$ suivant les trois axes principaux Ox, Oy, Oz fixes dans le globe, et L, M, N les moments résultants des actions frottantes par rapport à ces axes. Si nous pouvons encore assimiler le globe à un corps

---

(*) Voyez par exemple l'hypothèse de E. WIECHERT.

(**) Voyez SOMMERFELD, *op.* et *lib. cit.*, pp. 726 et suiv., et aussi E.-J. STONE, *On the possibility of a change in the position of the Earth's axis.* (MONTHLY NOTICES, Londres, mars 1867); et *Encycl. der math. Wissenschaften*, t. IV, art. 16.

(***) Il est clair que nous n'avons plus affaire à des frottements internes, mais à des actions extérieures (au globe proprement dit). Pour tout ce qui concerne le frottement des marées, consulter *Encycl. des math. Wissenschaften*, t. VI-1-B, art. 1, litt. E, pp. 68-83.

(IV) Voyez SOMMERFELD, *op.* et *lib. cit.*, p. 586.

parfaitement rigide de révolution ($A = B$) (*), les équations d'Euler donnent

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \dfrac{C-A}{A} r \,.\, q = -\dfrac{K}{A} p, \\ \dfrac{dq}{dt} - \dfrac{C-A}{A} r \,.\, p = -\dfrac{K}{A} q, \\ \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{K}{C} r \end{array}\right.$$

La dernière équation fournit immédiatement

$$r = r_0 e^{-\frac{K}{C}t}, \qquad (1)$$

r_0 étant la valeur initiale de r (correspondant à $t = t_0 = 0$).

En additionnant les deux premières après les avoir multipliées respectivement par 1 et i, il vient

$$\frac{d(p + iq)}{dt} - i\frac{C-A}{A} r(p + iq) = -\frac{K}{A}(p + iq),$$

ou

$$\frac{d(p + iq)}{(p + iq)dt} = i\frac{C-A}{A} r - \frac{K}{A},$$

ou, en introduisant la valeur (1) de r,

$$\frac{d \log (p + iq)}{dt} = i\frac{C-A}{A} r_0 e^{-\frac{K}{C}t} - \frac{K}{A};$$

d'où en intégrant

$$p + iq = (p_0 + iq_0) \,.\, e^{-\frac{K}{A}t + i\frac{C-A}{A}\frac{C}{K} r_0 \left(1 - e^{-\frac{K}{C}t}\right)}, \qquad (2)$$

p_0, q_0 étant les valeurs initiales de p, q.

Si nous désignons par λ l'angle que fait, à l'instant t, l'axe de rotation OI avec l'axe OC (Oz), nous avons

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}. \qquad (3)$$

(*) Ce qui n'est évidemment qu'une approximation.

En séparant la partie réelle de l'imaginaire, dans l'équation (2), nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} p = e^{-\frac{K}{A}t}(p_0 \cos\varphi - q_0 \sin\varphi), \\ q = e^{-\frac{K}{A}t}(p_0 \sin\varphi + q_0 \cos\varphi), \end{array}\right\} \quad (4)$$

φ désignant l'angle variable

$$\frac{C-A}{A}\frac{C}{K} r_0 (1 - e^{-\frac{K}{C}t}).$$

En élevant les expressions (4) au carré et en les additionnant, il vient

$$p^2 + q^2 = (p_0^2 + q_0^2) e^{-\frac{2K}{A}t}. \qquad (5)$$

La valeur (3) de tg λ devient, si l'on remplace $\sqrt{p^2 + q^2}$ et r par leurs expressions (1) et (5),

$$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\lambda_0 \cdot e^{-\frac{K}{A}t + \frac{K}{C}t} = \operatorname{tg}\lambda_0 \cdot e^{-\frac{K}{C}\frac{C-A}{A}t} = \operatorname{tg}\lambda_0 \cdot e^{-\frac{K}{C}\varepsilon t}, \qquad (6)$$

ε désignant l'ellipticité du globe, soit $\varepsilon = \frac{1}{305}$ d'après les formules de précession luni-solaire.

K est essentiellement positif. On voit que *l'axe* OI *tend encore à se rapprocher de l'axe d'inertie* OC. En tenant compte de (1) on peut encore écrire (6) sous la forme

$$\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\lambda_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\varepsilon}. \qquad (7)$$

Pour que λ devint la moitié de λ_0 (sa valeur primitive), il faudrait, puisque λ_0 est toujours très petit pour la Terre,

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{305}} = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2},$$

soit

$$r = \left(\frac{1}{2}\right)^{305} \cdot r_0 = \frac{1}{64} \cdot 10^{-91} r_0,$$

c'est-à-dire que r devrait être réduit à une fraction infime de sa valeur primitive (-2π par j. sid.). En d'autres termes, *la Terre devrait être actuellement presque immobile pour qu'on pût avoir une diminution de* 50 °/₀ *dans l'angle* COI $= \lambda$.

Le frottement de la marée solaire ne peut donc avoir aucun effet sensible sur la valeur de cet angle, c'est-à-dire sur la distance qui sépare le pôle de rotation I du pôle d'inertie C.

Mais il existe encore un autre genre de marée.

Le pôle I se déplaçant à la surface de la Terre, le bourrelet équatorial que forment les mers change avec lui; ce bourrelet, en se transportant à la surface du globe, exerce aussi un frottement sur ce dernier. Ce frottement s'oppose au déplacement du pôle de rotation, et l'axe de son couple est normal à l'axe de rotation OI et à la position (voisine) OI′ de cet axe à l'instant suivant. Les cosinus directeurs de OI sont proportionnels à

$$p, \quad q, \quad r,$$

tandis que ceux de OI′ sont proportionnels à

$$p + \frac{dp}{dt}dt, \quad q + \frac{dq}{dt}dt, \quad r + \frac{dr}{dt}dt.$$

Le plan OII′ a donc pour équation

$$Ax + By + Cz = 0$$

avec les valeurs suivantes pour ses coefficients

$$\left\{\begin{array}{l} A = \left[r\left(q + \dfrac{dq}{dt}dt\right) - q\left(r + \dfrac{dr}{dt}dt\right)\right] = \left(r\dfrac{dq}{dt} - q\dfrac{dr}{dt}\right)dt, \\ B = \left(p\dfrac{dr}{dt} - r\dfrac{dp}{dt}\right)dt, \\ C = \left(q\dfrac{dp}{dt} - p\dfrac{dq}{dt}\right)dt. \end{array}\right.$$

Les cosinus directeurs de l'axe du couple résistant, perpendiculaire au plan OII', seront donc proportionnels à

$$r\frac{dq}{dt} - q\frac{dr}{dt},\ p\frac{dr}{dt} - r\frac{dp}{dt},\ q\frac{dp}{dt} - p\frac{dq}{dt}.$$

Les composantes du couple résultant (supposé constant) des actions frottantes seront encore proportionnelles à ces quantités, soit égales à

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = -\mathrm{K}\left(r\dfrac{dq}{dt} - q\dfrac{dr}{dt}\right), \\ \mathrm{M} = -\mathrm{K}\left(p\dfrac{dr}{dt} - r\dfrac{dp}{dt}\right), \\ \mathrm{N} = -\mathrm{K}\left(q\dfrac{dp}{dt} - p\dfrac{dq}{dt}\right). \end{array}\right.$$

Pour la Terre p, q sont très petits, ainsi que les dérivées p', q', r' ; aussi pourrons-nous négliger les termes du second ordre en ces quantités et poser

$$r = n = -2\pi \text{ par jour sidéral.}$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = -\mathrm{K}n\dfrac{dq}{dt}, \\ \mathrm{M} = +\mathrm{K}n\dfrac{dp}{dt}, \\ \mathrm{N} = 0, \end{array}\right.$$

à ce degré d'approximation.

Introduisons ces valeurs dans les équations d'Euler ; il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \dfrac{C-A}{A}r\,.\,q = -\dfrac{\mathrm{K}n}{A}\dfrac{dq}{dt}, \\ \dfrac{dq}{dt} - \dfrac{C-A}{A}r\,.\,p = +\dfrac{\mathrm{K}n}{A}\dfrac{dp}{dt}, \\ \dfrac{dr}{dt} = 0. \end{array}\right.$$

Nous retrouvons en intégrant la dernière,

$$r = n, \quad (1)$$

et si nous introduisons cette valeur dans les deux premières, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dp}{dt} + \dfrac{C - A}{A} nq = - \dfrac{Kn}{A} \dfrac{dq}{dt}, \\ \dfrac{dq}{dt} - \dfrac{C - A}{A} np = + \dfrac{Kn}{A} \dfrac{dp}{dt}. \end{array} \right.$$

En posant encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{C - A}{A} n = \nu, \\ \dfrac{Kn}{A} = \mu, \end{array} \right.$$

puis en multipliant ces deux équations la première par 1, la seconde par i, et en les additionnant, nous avons

$$\frac{d(p + iq)}{dt} - i\nu(p + iq) = + i\mu \frac{d}{dt}(p + iq),$$

ou

$$\frac{d \log (p + iq)}{dt}(1 - i\mu) = i\nu,$$

d'où, en intégrant,

$$p + iq = (p_0 + iq_0) e^{\frac{i\nu}{1 - i\mu} t} \quad (2)$$

μ doit être toujours petit vis-à-vis de 1 : autrement les oscillations périodiques du pôle ne pourraient pas se produire. On peut alors écrire

$$\frac{1}{1 - i\mu} = 1 + i\mu,$$

puis

$$p + iq = (p_0 + iq_0)e^{i\nu(1+i\mu)t} = (p_0 + iq_0)e^{i\nu t}e^{-\mu\nu t},$$

ou, en séparant la partie réelle de l'imaginaire,

$$\left\{ \begin{array}{l} p = e^{-\mu\nu t}(p_0 \cos \nu t - q_0 \sin \nu t), \\ q = e^{-\mu\nu t}(p_0 \sin \nu t + q_0 \cos \nu t). \end{array} \right\} \quad (3)$$

La période eulérienne n'est pas altérée; elle est toujours $\frac{2\pi}{\nu}$. Mais l'amplitude $\sqrt{p^2 + q^2}$ de l'écart du pôle de rotation va décroissant suivant une exponentielle négative du temps (car μ et ν sont négatifs) : elle se *dissipe* (*gedämpft*, comme disent les auteurs allemands). L'in- fluence de la résistance passive est encore d'amortir les oscillations (*).

Nous ne continuerons pas davantage l'étude de ces cas particuliers. Ce que nous avons dit doit suffire pour donner une idée du rôle que jouent les résistances passives dans les mouvements du pôle de rotation.

APPENDICE.

Quelques mots d'explication sur le terme de H. Kimura.

Nous savons que S. Kostinsky (**) a indiqué l'expression suivante de la variation $\Delta\varphi$ de la latitude φ d'un lieu géographique M :

$$\Delta\varphi = x \cos \lambda + y \sin \lambda,$$

où x, y désignent les coordonnées du pôle de rotation I par

(*) Voyez SOMMERFELD, *op.* et *lib. cit.*, p. 729.

(**) *Variation de la latitude de Poulkowa*, 1893.

rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy et où λ représente la longitude de M.

Supposons encore que les axes Ox, Oy aient l'orientation positive (sens des aiguilles d'une montre) et que leur origine O soit la position moyenne de I (fixe à la surface de la Terre). Prenons Ox dirigé suivant le méridien de Greenwich et comptons les longitudes positivement vers l'Ouest : Oy a alors la longitude $+ 90°$.

Joignons O à M par un arc de grand cercle OM, et de I (x, y) abaissons l'arc de grand cercle perpendiculaire à OM, qui coupe ce dernier en K. L'angle IMO est très petit parce que I reste toujours très voisin de O. L'angle xOM est la longitude λ de M. Nous pouvons donc écrire (*) :

$$\Delta\varphi = \text{OM} - \text{IM} = \text{OM} - \text{KM} = \text{OK} = x\cos\lambda + y\sin\lambda.$$

Mais, comme nous l'avons dit dans la première partie, H. Kimura a montré (**) que cette expression devait être complétée par un terme annuel z indépendant de la longitude λ :

$$\Delta\varphi = x\cos\lambda + y\sin\lambda + z.$$

D'où peut provenir ce terme z?

Nous donnerons seulement ici quelques opinions.

R. Schumann (***), dans un article intitulé : *Ueber die Polhöhenschwankungen*, reprend l'hypothèse de E. Wiechert d'après laquelle la Terre serait constituée de la façon suivante : une écorce peu dense (densité 2,7 environ) de 1 400 kilomètres (environ) d'épaisseur, une couche plastique très mince sous-jacente, et, à l'intérieur de celles-ci, un noyau en fer de 5 000 kilomètres de rayon. Le déplacement de l'écorce par rapport au noyau dépend de six variables : 1° trois translations

---

(*) Pour un calcul plus rigoureux, voir par exemple Le Paige, Note, *Bull. Acad. des sc. de Belgique*, 1903, n° 1, pp. 17 et suivantes.

(*) *On the existence of a new annual term . . .* (Astronomische Nachrichten, t. CLVIII, n° 3783.)

(**) *Astronomische Nachrichten*, 1903, n° 3877.

a, b, c (variations des coordonnées du centre de gravité de la croûte par rapport à un système rectangulaire ayant pour origine le centre de gravité O de l'ensemble), qui donnent la variation de latitude

$$\Delta_1\varphi = -K\left(\frac{a}{r}\cos\lambda + \frac{b}{r}\sin\lambda\right)\sin\varphi + K\frac{c}{r}\cos\varphi,$$

λ et φ désignant respectivement la longitude et la latitude du lieu d'observation, r sa distance au centre de gravité O de l'ensemble (fixe), K une constante ;

2° trois rotations u, v, w autour de Ox, Oy, Oz produisant variation

$$\Delta_2\varphi = u\sin\lambda - v\cos\lambda.$$

La variation $\Delta\varphi$ observée dans la latitude sera alors

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \Delta_2\varphi = &-(v + K\frac{a}{r}\sin\varphi)\cos\lambda \\ &+ (u - K\frac{b}{r}\sin\varphi)\sin\lambda \\ &+ K\frac{c}{r}\cos\varphi.\end{aligned}$$

En comparant cette dernière expression à

$$\Delta\varphi = x\cos\lambda + y\sin\lambda + z,$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} x = -v - K\dfrac{a}{r}\sin\varphi, \\ y = +u - K\dfrac{b}{r}\sin\varphi, \\ z = +K\dfrac{c}{r}\cos\varphi. \end{array}\right\}$$

Si le déplacement c du centre de gravité de la croûte suivant

l'axe polaire a une période annuelle, il en sera de même de z, et ce dernier pourrait constituer le terme annuel de Kimura (*).

W. de Sitter se place à un autre point de vue (**). On sait que Kapteyn a indiqué la valeur 0″02 pour la parallaxe annuelle apparente des étoiles avec lesquelles on détermine habituellement les latitudes. L'influence de cette parallaxe, combinée à la petite action luni-solaire dont nous avons déjà parlé, pourrait, d'après de Sitter, expliquer la moitié du terme annuel de Kimura. Nous ne pouvons développer ses considérations ici, car il s'agit d'une question d'astronomie pure.

Pour la même raison, nous ne ferons que citer l'opinion de L. Courvoisier (***). Selon ce dernier, l'hypothèse de J. M. Schaeberle, d'après laquelle il pourrait exister dans les régions circumpolaires un milieu matériel, ou une condensation de l'éther, aurait pour conséquence une réfraction annuelle analogue à la parallaxe : cette réfraction pourrait réduire la valeur 0″13 de la parallaxe indiquée par S.-C. Chandler [pour expliquer le terme z de Kimura (iv)] à la valeur apparente 0″02 donnée par Kapteyn.

Il est nécessaire de dire que A. Pannekoek a contesté cette conclusion (v).

Enfin P. Harzer a touché aussi ce genre de question (vi).

(*) Voyez encore les recherches numériques de R. Schumann, *Astr. Nachr.*, nos 4142-4143.

(**) *Astronomische Nachrichten*, no 3981, 1904.

(***) *Astronomische Nachrichten*, t. CLXV, nos 3990-3991.

(iv) *Astronomical Journal*, t. XXII et XXIII, nos 517, 524, 530, etc.

(v) *Astronomische Nachrichten*, t. CLXV, nos 4008, 4012, 4024, 4031.

(vi) *Astronomische Nachrichten*, t. CLXV, no 4028.

NOTE

Complément de la section A de la Troisième partie.

(*Suite du* § 1.)

R. Radau a fait remarquer (*) que Lagrange avait déjà établi les équations (16) dans le deuxième et le troisième fragment annexés au second volume de sa *Mécanique analytique* (**); seulement ces équations sont tombées dans l'oubli et ont été retrouvées dans la suite par d'autres géomètres, qui ont d'ailleurs suivi des voies différentes pour les obtenir. Radau a adopté les notations usuelles aux formules du grand géomètre et nous a fait admirer, une fois de plus, son génial talent.

La méthode que Lagrange emploie dans le deuxième fragment (***) est entièrement analytique et revient à employer le *principe de d'Alembert*. Dans le troisième fragment (iv) il établit plus directement les équations (16), mais seulement dans le cas de la rotation naturelle ($L = M = N = 0$). Radau fait observer qu'il suffirait d'appliquer le *principe d'Hamilton*, au lieu de celui *des travaux virtuels*, pour obtenir par cette méthode les équations générales. Cette remarque nous a suggéré une démonstration directe, au moyen du principe d'Hamilton, des équations (16) où f, g, h ont les expressions (12), plus

---

(*) Voyez F. Tisserand, *Mécanique céleste*, t. II, 1891, chap. XXX, p. 500, et *Bulletin astronomique*, t. VII, février 1890, p. 63.

(**) On sait en effet que la *Mécanique analytique* ne fut terminée qu'en 1815, deux ans après la mort de Lagrange, et que les éditeurs du tome II ont renvoyé à la fin du volume plusieurs fragments relatifs aux équations générales du mouvement de rotation d'un corps de forme quelconque et qui leur avaient paru « trop incomplets pour entrer dans le texte ». (Voyez *Méc. Anal.*, t. II, p. 229).

(***) *Mécanique analytique*, t. II, section IX, p. 212 et 2e fragment, p. 357.

(iv) *Mécanique analytique*, t. II, 3e fragment, p. 366.

générales que celles de Lagrange (*). Nous en reparlerons plus bas.

J. Liouville, reprenant les idées de Poisson, a établi (**) à nouveau les équations (16), sans faire aucunement mention des travaux de Lagrange sur la question.

E.-J. Routh les a reproduites dans sa *Rigid Dynamics* (4e édit., t. II, p. 336) et les attribue à Liouville.

H. Gyldén, dans son célèbre Mémoire de 1871 : *Recherches sur la rotation de la Terre* (***), les a établies directement.

Au contraire ce même savant dans un autre travail (iv), G.-H. Darwin dans son étude magistrale (v), et S. Oppenheim (vi) les attribuent encore à Liouville.

On peut également consulter à ce sujet :

R. B. Hayward, On a direct method of estimating velocities with respect to axes moveable in space. (*Cambridge Phil. Trans*, 1854, t. X.)

P. G. Tait, On the rotation of a body about a fixed point. (*Edinburgh R. S. Transactions*, 1869, t. XXV, p. 279.)

H. Schultz, *Vierteljahrschrift des astronomischen Gesellschaft*. Leipzig, 1874, p. 119.

(*) En effet, ces dernières se déduisent des expressions (12), en supposant les deux trièdres mobiles liés invariablement l'un à l'autre, c'est-à-dire en faisant $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, $r = \omega_z$.

(**) *Développement sur un chapitre de la Mécanique de Poisson*. (Journal de Math. pures et appl., 2e série, t. III, 1858, et Add. a la connaissance des temps pour 1859, 1857.)

(***) *Nova Acta Soc. Reg. Upsaliensis*, 3e série, t VIII, 1871, 1er fascicule.

(iv) *Ueber die Rotation eines festen Kerns*... (Astronomische Nachrichten, 1878, t. XCIII, n° 2226.)

(v) *On the influence of the geological changes*... (Phil. Transactions, Londres, 1877, t. CLXVII, p. 272.)

(vi) *Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroids*. (Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss., Vienne, t. XCII, 1885, et Astronomische Nachrichten, 1885, n° 2781.)

F.-R. Helmert, *Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft*. Leipzig, 1878, p. 309.

— Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Leipzig, 1884, t. II, chap. V.

P. Schwahn, Ueber Aenderungen der Lage der Figur- und der Rotations axe des Erde... Berlin, juin 1887.

F. Tisserand, Mécanique céleste, t. II, 1891, chap. XXX, p. 500.

L. Picart, Sur la rotation d'un corps variable. (*Ann. Observ.*, Bordeaux, t. VII, 1897, p. 1.)

V. Volterra, Sur la théorie des variations des latitudes. (*Acta mathematica*, 1898, t. XXII, p. 201.)

F. Klein et A. Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels. Leipzig, 1er fasc., 1897, p. 138 et 3e fasc., 1903, p. 711.

Etc.

On peut encore obtenir les équations différentielles (16) par l'emploi du *principe de d'Alembert;* cette méthode ne diffère pas essentiellement, avons-nous dit, de celle employée par Lagrange.

Les trois équations de moments relatives à l'équilibre d'un système, combinées avec le principe de d'Alembert, nous permettent d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{L} &= \Sigma m(\mathrm{J}_z y - \mathrm{J}_y z), \\ \mathrm{M} &= \Sigma m(\mathrm{J}_x z - \mathrm{J}_z x), \\ \mathrm{N} &= \Sigma m(\mathrm{J}_y x - \mathrm{J}_x y), \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

où L, M, N représentent les moments résultants des forces extérieures par rapport aux axes de référence Ox, Oy, Oz, où x, y, z désignent les coordonnées, relatives aux mêmes axes, d'un point M du corps (de masse m), et où J_x, J_y, J_z représentent les composantes, suivant ces axes, de l'*accélération absolue* $\bar{\mathrm{J}}$ du point M; la somme Σ doit s'étendre à tous les points M du corps.

Si nous désignons, comme plus haut, par v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse absolue $\bar{v}$ de M suivant les axes Ox, Oy, Oz, et par p, q, r les composantes, suivant les mêmes axes, de la

rotation instantanée $\bar{o}$ du trièdre $Oxyz$ qu'ils forment, nous aurons pour composantes de $\bar{J}$ suivant ces axes :

$$\left\{\begin{array}{l} J_x = \dfrac{dv_x}{dt} + qv_z - rv_y, \\ J_y = \dfrac{dv_y}{dt} + rv_x - pv_z, \\ J_z = \dfrac{dv_z}{dt} + pv_y - qv_x; \end{array}\right. \quad (18)$$

en effet, l'accélération absolue $\bar{J}$ est la vitesse absolue de l'extrémité du vecteur *vitesse absolue de* M mené par O, et se compose par conséquent de la vitesse relative $\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$ de cette extrémité par rapport à $Oxyz$ et de la vitesse d'entraînement $(qv_z - rv_y,\ rv_x - pv_z,\ pv_y - qv_x)$ de ce même point due à la rotation instantanée $\bar{o}$ (p, q, r) de ce trièdre $Oxyz$.

En substituant les valeurs (18) dans les expressions (17), nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} L = \Sigma m \left\{\left(\dfrac{dv_z}{dt} + pv_y - qv_x\right) y - \left(\dfrac{dv_y}{dt} + rv_x - pv_z\right) z\right\} \\ \quad = \Sigma m \left(\dfrac{dv_z}{dt}\, y - \dfrac{dv_y}{dt}\, z\right) + \Sigma m(pv_y - qv_x) y - \Sigma m(rv_x - pv_z) z \\ \quad = \Sigma m \left(\dfrac{dv_z}{dt}\, y - \dfrac{dv_y}{dt}\, z\right) + p \,.\, \Sigma m(v_y y + v_z z) - q \,.\, \Sigma m v_x y - r \,.\, \Sigma m v_x z, \\ \quad . \\ \quad . \end{array}\right.$$

En remarquant que

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv_z}{dt}\, y - \dfrac{dv_y}{dt}\, z = \dfrac{d}{dt}\left(v_z y - v_y z\right) - \left(v_z \dfrac{dy}{dt} - v_y \dfrac{dz}{dt}\right), \\ \quad . \\ \quad . \quad , \end{array}\right.$$

nous pouvons écrire les dernières équations sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = \dfrac{d}{dt}\,\Sigma m(v_z y - v_y z) - \Sigma m\left(v_x \dfrac{dy}{dt} - v_y \dfrac{dz}{dt}\right) \\ \quad + p\,.\,\Sigma m(v_y y + v_z z) - q\,.\,\Sigma m v_x y - r\,.\,\Sigma m v_x z, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \quad (19)$$

Mais les projections sur Ox, Oy, Oz de la vitesse relative d'un point M par rapport à ces axes, savoir $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, ont les valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = v_x - (qz - ry), \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y - (rx - pz), \\ \dfrac{dz}{dt} = v_z - (py - qx), \end{array}\right\} \quad (20)$$

puisque cette vitesse relative est la différence géométrique entre la vitesse absolue (v_x, v_y, v_z) et la vitesse d'entraînement $(qz - ry, rx - pz, py - qx)$. En substituant les valeurs (20) dans les équations (19), nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = \dfrac{d}{dt}\,\Sigma m(v_z y - v_y z) - \Sigma m\left\{v_z[v_y - (rx - pz)] - v_y[v_z - (py - qx)]\right\} \\ \quad + p\,.\,\Sigma m(v_y y + v_z z) - q\,.\,\Sigma m v_x y - r\,.\,\Sigma m v_x z, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \end{array}\right\}$$

ou, en effectuant les réductions,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L} = \dfrac{d}{dt}\,\Sigma m(v_z y - v_y z) + q\,.\,\Sigma m(v_y x - v_x y) - r\,.\,\Sigma m(v_z z - v_x x), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \quad (21)$$

Or les quantités $\Sigma m(v_z y - v_y z)$, $\Sigma m(v_x z - v_z x)$, $\Sigma m(v_y x - v_x y)$ sont les moments résultants, par rapport à Ox, Oy, Oz, des quantités de mouvement absolu, que nous avons désignés précédemment par f, g, h. Les équations (21) peuvent donc s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df}{dt} + qh - rg = \mathrm{L} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ; \end{array}\right.$$

cette forme est bien celle (16) que nous nous proposions d'établir.

* * *

On peut encore mettre les équations différentielles (16) du mouvement sous une autre forme (*).

Soit 2T la force vive totale absolue du corps :

$$2\mathrm{T} = \Sigma m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (22)$$

Substituons dans son expression les valeurs (8) de v_x, v_y, v_z, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} 2\mathrm{T} = \Sigma m[(w_x + \omega_y z - \omega_z y)^2 + (w_y + \omega_z x - \omega_x z)^2 \\ \qquad\qquad + (w_z + \omega_z y - \omega_y x)^2]. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Prenons les dérivées partielles de T par rapport aux composantes ω_x, ω_y, ω_z de la rotation $\overline{\omega}$ du trièdre $O\xi\eta\zeta$, nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_x} = \Sigma m(w_x y - w_y z) + \omega_x \cdot \Sigma m(y^2 + z^2) - \omega_y \cdot \Sigma mxy - \omega_z \cdot \Sigma mzx \\ \qquad = \sigma_x + \mathrm{A}\omega_x - \mathrm{F}\omega_y - \mathrm{E}\omega_z = f, \quad \text{et de même} \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_y} = g, \\ \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_z} = h. \end{array}\right\} \quad (24)$$

(*) Voyez notre opuscule, p. 11.

Les équations (16) du mouvement pourront donc s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x} + q\dfrac{\partial T}{\partial \omega_z} - r\dfrac{\partial T}{\partial \omega_y} = L, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \omega_y} + r\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x} - p\dfrac{\partial T}{\partial \omega_z} = M, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \omega_z} + p\dfrac{\partial T}{\partial \omega_y} - q\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x} = N. \end{array}\right\} \quad (25)$$

Dans le cas particulier où les axes $Oxyz$, $O\zeta\eta\xi$ sont liés invariablement

$$p = \omega_x, \qquad q = \omega_y, \qquad r = \omega_z,$$

et les équations (25) deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial q} = L, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial r} = M, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} + p\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial p} = N. \end{array}\right\} \quad (26)$$

C'est sous cette forme que Lagrange avait écrit d'abord les équations du mouvement de rotation d'un corps solide (*).

G. Kirchhoff les a déduites, pour ce cas particulier, du principe d'Hamilton, mais sa démonstration ne s'étend pas au cas général (**).

Enfin V. Volterra les démontre aussi à l'aide de ce principe (***), au cas où il existe des mouvements polycycliques.

(*) *Mécanique analytique*, t. II, 1815, section IX.

(**) *Vorlesungen über mathematische Physik : Mechanik;* 3e éd., 1883, 6e leçon.

(***) *Sur la theorie des variations des latitudes.* (ACTA MATHEMATICA, t. XXII, 1898, p. 286.)

*
* *

Essayons maintenant de déduire directement les équations tout à fait générales (25) du principe d'Hamilton.

Soient

	Ox_1	Oy_1	Oz_1	$O\xi$	$O\eta$	$O\zeta$
Ox	a	b	c	α	β	γ
Oy	a'	b'	c'	α'	β'	γ'
Oz	a''	b''	c''	α''	β''	γ''

les cosinus directeurs des axes de référence Ox, Oy, Oz vis-à-vis du système fixe $Ox_1y_1z_1$ et de l'autre système mobile $O\xi\eta\zeta$.

Soient encore X_1, Y_1, Z_1 et X, Y, Z les projections, sur chacun des axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 et Ox, Oy, Oz, d'une force quelconque (extérieure) directement appliquée au point M. Nous appellerons, comme plus haut, L, M, N les moments *résultants*, par rapport à Ox, Oy, Oz, des forces directement appliquées aux divers points M du corps de forme variable.

Donnons à un point M de ce corps un *déplacement virtuel absolu* $\overline{\delta s}$ (compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant considéré) ; ce déplacement *absolu* $\overline{\delta s}$ se compose évidemment du déplacement *virtuel relatif* $\overline{\delta W}$ par rapport aux axes mobiles $O\xi\eta\zeta$ (c'est cette partie du déplacement qui est astreinte aux liaisons et que l'on connaît par hypothèse) et du *déplacement d'entraînement* (dû à la rotation $\overline{\omega}$) de ces axes par rapport au système fixe $Ox_1y_1z_1$ (c'est ce dernier déplacement, ou plutôt les composantes de ce déplacement qui jouent le rôle d'inconnues).

Soient δx_1, δy_1, δz_1 et $\delta^1 x$, $\delta^1 y$, $\delta^1 z$ les projections du déplacement virtuel *absolu* $\overline{\delta s}$ sur chacun des axes du système fixe $Ox_1y_1z_1$ et du système mobile de référence $Oxyz$.

Appelons δW_x, δW_y, δW_z les composantes suivant Ox, Oy, Oz du déplacement virtuel *relatif* par rapport aux axes mobiles $O\xi\eta\zeta$. Enfin désignons par $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$, $\delta\Omega_z$ les composantes suivant Ox, Oy, Oz du déplacement angulaire élémentaire $\overline{\delta\Omega} = \overline{\omega\delta t}$. Ces

composantes δW_x, δW_y, δW_z, $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$, $\delta\Omega_z$ ne sont pas, en général, des différentielles totales exactes (*).

Le point M du corps a pour déplacement linéaire dû à la rotation d'entraînement $\overline{\delta\Omega}$ (fig. 9)

$$\overline{MM'} = \overline{\rho \,.\, \delta\Omega},$$

ρ étant la distance de M au vecteur $\overline{\omega}$ (passant par O) et M′ désignant la nouvelle position de M.

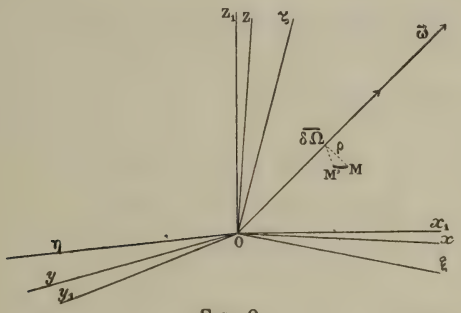


Fig. 9.

En affectant le signe $\mathfrak{M}$ (des moments) d'indices représentant les points par rapport auxquels on les prend, et les vecteurs d'indices signifiant les points où on les suppose appliqués, nous pouvons écrire

$$\overline{MM'} = \overline{\rho \,.\, \delta\Omega} = \overline{\mathfrak{M}_M \delta\Omega_0} = -\overline{\mathfrak{M}_0 \delta\Omega_M}.$$

Donc le déplacement virtuel *absolu* $\overline{\delta s}$ du point M a pour expression

$$\overline{\delta s} = \overline{\delta W} - \overline{\mathfrak{M}_0 \delta\Omega_M},$$

puisqu'il est la somme géométrique du déplacement relatif et du déplacement d'entraînement.

(*) Cf. Lagrange, *Mécanique analytique*, t. II, 1815, section IX, p. 228.

Si nous désignons par x, y, z les coordonnées du point M par rapport aux axes de référence $Oxyz$, nous obtenons, en projetant sur chacun de ces axes l'expression vectorielle précédente,

$$\left\{\begin{array}{l} \delta^1 x = \delta W_x + \delta\Omega_y \cdot z - \delta\Omega_z \cdot y, \\ \delta^1 y = \delta W_y + \delta\Omega_z \cdot x - \delta\Omega_x \cdot z, \\ \delta^1 z = \delta W_z + \delta\Omega_x \cdot y - \delta\Omega_y \cdot x. \end{array}\right\} \quad (27)$$

La somme $\delta\mathcal{T}$ des travaux virtuels des forces extérieures est évidemment

$$\delta\mathcal{T} = \Sigma(X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1).$$

Comme on a les relations

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = aX + a'Y + a''Z, \\ Y_1 = bX + b'Y + b''Z, \\ Z_1 = cX + c'X + c''Z, \end{array}\right\}$$

et en même temps

$$\left\{\begin{array}{l} \delta^1 x = a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1, \\ \delta^1 y = a'\delta x_1 + b'\delta y_1 + c'\delta z_1, \\ \delta^1 z = a''\delta x_1 + b''\delta y_1 + c''\delta z_1, \end{array}\right\}$$

cette somme peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T} &= \Sigma[(aX + a'Y + a''Z)\delta x_1 + \ldots] \\ &= \Sigma[X(a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1) + \ldots] \\ &= \Sigma(X\delta^1 x + Y\delta^1 y + Z\delta^1 z), \end{aligned} \quad (28)$$

ce qu'on pouvait d'ailleurs écrire directement, puisque la mesure du travail est indépendante des axes sur lesquels on projette les forces et les déplacements. Si nous substituons, dans l'expression (28), les valeurs (27) de $\delta^1 x$, $\delta^1 y$, $\delta^1 z$, nous aurons

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T} &= \Sigma(X\delta W_x + Y\delta W_y + Z\delta W_z) + \delta\Omega_x \cdot \Sigma(Zy - Yz) + \ldots \\ &= \Sigma(X\delta W_x + Y\delta W_y + Z\delta W_z) + L\delta\Omega_x + M\delta\Omega_y + N\delta\Omega_z. \end{aligned} \quad (29)$$

Remarquons que, dans cette dernière expression, la somme

$$\Sigma(X\delta W_x + Y\delta W_y + Z\delta W_z),$$

travail correspondant au déplacement relatif, est absolument indépendante des composantes $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$, $\delta\Omega_z$, qui jouent elles-mêmes le rôle de variables absolument indépendantes entre elles.

Maintenant établissons des expressions remarquables des composantes $\delta\omega_x$, $\delta\omega_y$, $\delta\omega_z$ (de la variation virtuelle $\overline{\delta\omega}$ de la vitesse $\overline{\omega}$ de rotation instantanée du trièdre $O\xi\eta\zeta$).

Soient $\delta\omega_{x_1}$, $\delta\omega_{y_1}$, $\delta\omega_{z_1}$, et $\delta\omega_x$, $\delta\omega_y$, $\delta\omega_z$ les composantes suivant Ox_1, Oy_1, Oz_1 et Ox, Oy, Oz de cette rotation virtuelle $\overline{\delta\omega}$. Nous pouvons écrire

$$\left.\begin{aligned} \delta\omega_{x_1} &= \delta\left(\frac{d\Omega_{x_1}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\delta\Omega_{x_1}, \\ \delta\omega_{y_1} &= \delta\left(\frac{d\Omega_{y_1}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\delta\Omega_{y_1}, \\ \delta\omega_{z_1} &= \delta\left(\frac{d\Omega_{z_1}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\delta\Omega_{z_1}; \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

en d'autres termes, les caractéristiques d et δ peuvent se permuter, car elles se rapportent à des projections des déplacements angulaires absolus $\overline{\delta\Omega}$, $\overline{d\Omega}$ sur des axes absolument fixes, ce qui signifie que $d\Omega_{x_1}, \ldots$, $\delta\Omega_{x_1}, \ldots$ sont des différentielles et variations totales exactes (*).

D'autre part,

$$\left.\begin{aligned} \delta\Omega_{x_1} &= a\delta\Omega_x + a'\delta\Omega_y + a''\delta\Omega_z, \\ \delta\Omega_{y_1} &= b\delta\Omega_x + b'\delta\Omega_y + b''\delta\Omega_z, \\ \delta\Omega_{z_1} &= c\delta\Omega_x + c'\delta\Omega_y + c''\delta\Omega_z, \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

(*) Voyez LAGRANGE, *op.* et *lib. cit.*, p. 228. $\delta\Omega_{x_1}$, $\delta\Omega_{y_1}$, $\delta\Omega_{z_1}$ désignent les composantes de $\delta\Omega$ suivant Ox_1, Oy_1, Oz_1.

en sorte que

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\omega_{x_1} = a\dfrac{d\,.\,\delta\Omega_x}{dt} + \ldots\ldots + \delta\Omega_x\cdot\dfrac{da}{dt} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (32)$$

En substituant ces valeurs dans

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\omega_x = a\delta\omega_{x_1} + b\delta\omega_{y_1} + c\delta\omega_{z_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (33)$$

nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\omega_x = (a^2 + b^2 + c^2)\dfrac{d\,.\,\delta\Omega_x}{dt} + \ldots\ldots \\ \qquad + \delta\Omega_x\left(a\dfrac{da}{dt} + b\dfrac{db}{dt} + c\dfrac{dc}{dt}\right) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (34)$$

Mais comme a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont les cosinus directeurs d'axes rectangulaires, nous avons les relations connues :

$$\left\{\begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & a''a + b''b + c''c = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \end{array}\right\}$$

et par suite

$$\left\{\begin{array}{l} a\dfrac{da}{dt} + b\dfrac{db}{dt} + c\dfrac{dc}{dt} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a''\dfrac{da'}{dt} + b''\dfrac{db'}{dt} + c''\dfrac{dc'}{dt} = -a'\dfrac{da''}{dt} - b'\dfrac{db''}{dt} - c'\dfrac{dc''}{dt} = p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

p, q, r étant, comme plus haut, les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée $\overline{o}$ du trièdre $Oxyz$ que ces axes forment (*).

Il s'ensuit alors que les formules (34) se réduisent à

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\omega_x = \dfrac{d}{dt}\,\delta\Omega_x + q\,.\,\delta\Omega_z - r\,.\,\delta\Omega_y, \\ \delta\omega_y = \dfrac{d}{dt}\,\delta\Omega_y + r\,.\,\delta\Omega_x - p\,.\,\delta\Omega_z, \\ \delta\omega_z = \dfrac{d}{dt}\,\delta\Omega_z + p\,.\,\delta\Omega_y - q\,.\,\delta\Omega_x. \end{array}\right\} \quad (35)$$

Ces premiers résultats acquis, calculons la force vive totale absolue $2T$ du corps en mouvement. Si nous désignons par v_x, v_y, v_z les composantes suivant Ox, Oy, Oz de la vitesse absolue $\overline{v}$ d'un point M de masse m, cette force vive sera exprimée par

$$2T = \Sigma m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (22)$$

En introduisant dans cette valeur les expressions (4) de v_x, v_y, v_z (**), nous aurons, comme plus haut,

$$\left.\begin{array}{l} 2T = \Sigma m[(w_x + \omega_y z - \omega_z y)^2 + (w_y + \omega_z x - \omega_x z)^2 \\ \qquad\qquad + (w_z + \omega_x y - \omega_y x)^2]. \end{array}\right\} \quad (23)$$

Calculons la variation de la demi-force vive δT qui résulte d'un mouvement virtuel tel que chaque point subisse un déplacement virtuel absolu $\overline{\delta s}$ dans le temps δt. Elle est

$$\begin{aligned} \delta T = {} & \frac{\partial T}{\partial \omega_x}\delta\omega_x + \frac{\partial T}{\partial \omega_y}\delta\omega_y + \frac{\partial T}{\partial \omega_z}\delta\omega_z \\ & + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial T}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial T}{\partial z_i}\delta z_i\right) \\ & + \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial T}{\partial w_{x_i}}\delta w_{x_i} + \frac{\partial T}{\partial w_{y_i}}\delta w_{y_i} + \frac{\partial T}{\partial w_{z_i}}\delta w_{z_i}\right), \end{aligned} \quad (36)$$

(*) Les dernières formules sont classiques. Voyez, par exemple, LAGRANGE, *op.* et *lib. cit.*, p. 221.

(**) Expressions qui peuvent se déduire des relations (27), si l'on remplace la caractérisque δ^1 par d et si l'on divise par dt.

où n est le nombre de points du corps et où les δx_i, δy_i, δz_i ne représentent pas les projections $\delta^1 x$, $\delta^1 y$, $\delta^1 z$ du déplacement virtuel *absolu* $\overline{\delta s}$, mais bien les variations des coordonnées relatives x_i, y_i, z_i.

Remarquons que, dans cette expression, les variations virtuelles de ces coordonnées et des composantes w_{xi}, w_{yi}, w_{zi} des vitesses relatives sont supposées connues (elles doivent satisfaire aux liaisons telles qu'elles existent à l'instant considéré) et par conséquent ne dépendent nullement des composantes $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$, $\delta\Omega_z$ de la variation $\overline{\delta\Omega} = \overline{\omega\delta t}$, composantes qui jouent le rôle de variables absolument indépendantes.

Au contraire, les composantes $\delta\omega_x$, $\delta\omega_y$, $\delta\omega_z$ en dépendent, d'après les expressions (35).

Si nous substituons ces expressions dans la valeur (36) de δT, nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta T = {} & \frac{\partial T}{\partial \omega_x}\left(\frac{d\,.\,\delta\Omega_x}{dt} + q\,.\,\delta\Omega_z - r\,.\,\delta\Omega_y\right) \\ & + \frac{\partial T}{\partial \omega_y}\left(\frac{d\,.\,\delta\Omega_y}{dt} + r\,.\,\delta\Omega_x - p\,.\,\delta\Omega_z\right) \\ & + \frac{\partial T}{\partial \omega_z}\left(\frac{d\,.\,\delta\Omega_z}{dt} + p\,.\,\delta\Omega_y - q\,.\,\delta\Omega_x\right) + \delta R, \quad (37)\end{aligned}$$

où δR désigne la somme des termes qui ne dépendent pas des composantes $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$, $\delta\Omega_z$.

Si nous remarquons que

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial \omega_x}\cdot\dfrac{d\,.\,\delta\Omega_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x}\,\delta\Omega_x\right) - \delta\Omega_x\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x}\right), \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

nous pourrons écrire (37) sous la forme

$$\begin{aligned}\delta T = {} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\cdot\delta\Omega_x + \frac{\partial T}{\partial \omega_y}\cdot\delta\Omega_y + \frac{\partial T}{\partial \omega_z}\cdot\delta\Omega_z\right)\\ & - \delta\Omega_x\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_x} + q\frac{\partial T}{\partial \omega_z} - r\frac{\partial T}{\partial \omega_y}\right)\\ & - \delta\Omega_y\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_y} + r\frac{\partial T}{\partial \omega_x} - p\frac{\partial T}{\partial \omega_z}\right)\\ & - \delta\Omega_z\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_z} + p\frac{\partial T}{\partial \omega_y} - q\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\right) + \delta R. \quad (38)\end{aligned}$$

Cela posé, appliquons le *principe d'Hamilton*. Ce principe nous dit que, *si* T *représente la demi-somme des forces vives des différents points du corps en mouvement et* $\delta\mathcal{T}$ *l'expression du travail virtuel des forces extérieures, on a*

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta\mathcal{T})dt = 0, \quad (39)$$

t_0 *et* t_1 *désignant deux époques données, pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du corps, pourvu que l'on donne les positions initiale et finale du corps, ou que l'on suppose nuls les déplacements virtuels relatifs aux époques* t_0 *et* t_1.

Remplaçons, dans l'expression (39) de ce principe, δT et $\delta\mathcal{T}$ par leurs valeurs (39) et (29); nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\delta\Omega_x + \frac{\partial T}{\partial \omega_y}\delta\Omega_y + \frac{\partial T}{\partial \omega_z}\delta\Omega_z\right)\right]dt\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\begin{aligned}&\left[L - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_x} + q\frac{\partial T}{\partial \omega_z} - r\frac{\partial T}{\partial \omega_y}\right)\right]\delta\Omega_z\\ &+\left[M - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_y} + r\frac{\partial T}{\partial \omega_x} - p\frac{\partial T}{\partial \omega_z}\right)\right]\delta\Omega_y\\ &+\left[N - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_z} + p\frac{\partial T}{\partial \omega_y} - q\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\right)\right]\delta\Omega_z\end{aligned}\right\}dt\\ &+\int_{t_0}^{t_1}(X\delta W_x + Y\delta W_y + Z\delta W_z + \delta R)dt = 0. \quad (40)\end{aligned}$$

Le premier terme est nul, car il vaut

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \omega_x}\delta\Omega_x + \frac{\partial T}{\partial \omega_y}\delta\Omega_y + \frac{\partial T}{\partial \omega_z}\delta\Omega_z\right]_{t_0}^{t_1},$$

et, par hypothèse, $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$ $\delta\Omega_z$ sont nulles aux époques t_0 et t_1.

Le troisième terme est indépendant de $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$, $\delta\Omega_z$, comme nous l'avons montré.

Il faut donc, pour que cette égalité (40) puisse avoir lieu quelles que soient $\delta\Omega_x$, $\delta\Omega_y$, $\delta\Omega_z$, que les coefficients de ces dernières variations sous le second signe $\int$ soient nuls séparément, soit

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x} + q\dfrac{\partial T}{\partial \omega_z} - r\dfrac{\partial T}{\partial \omega_y} = L, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \omega_y} + r\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x} - p\dfrac{\partial T}{\partial \omega_z} = M, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \omega_z} + p\dfrac{\partial T}{\partial \omega_y} - q\dfrac{\partial T}{\partial \omega_x} = N, \end{array}\right\}$$

ce qui est bien le système (25) que nous avons obtenu plus haut.

Remarque. Notre raisonnement sur l'indépendance des variations revient à prendre seulement, comme le fait Lagrange (*), la variation de T relative aux (rotations élémentaires $p\delta t$, $q\delta t$, $r\delta t$ remplacées ici par les) composantes ω_x, ω_y, ω_z de la rotation instantanée $\bar{\omega}$ du second trièdre mobile $O\xi\eta\zeta$.

* * *

On peut encore arriver aux équations (17)

$$\left\{\begin{array}{l} L = \Sigma m(J_z y - J_y z), \\ M = \Sigma m(J_z z - J_z x), \\ N = \Sigma m(J_y x - J_x y), \end{array}\right\}$$

(*) *Mécanique analytique*, t. II, 1815, 3e fragment, p. 366.

qui traduisent le principe de d'Alembert et qui conduisent aux équations différentielles (16) du mouvement, au moyen du théorème bien connu sur l'*énergie d'accélération* (*).

Si l'on considère l'énergie d'accélération absolue $2S = \Sigma m(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)$ *et si on l'exprime de façon qu'elle ne contienne plus d'autres dérivées deuxièmes que celles des* k *paramètres indépendants* $q_1, q_2, \ldots, q_k$ *(dont les variations sont arbitraires et déterminent le mouvement élémentaire du système), on obtient les équations du mouvement en écrivant*

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2, \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial q_k''} = Q_k, \qquad (41)$$

où q_1'', q_2'',..., q_k'' représentent les dérivées deuxièmes des paramètres q_1, q_2,..., q_k par rapport au temps t, et où Q_1, Q_2,..., Q_k désignent les coefficients des variations δq_1, δq_2,..., δq_k dans l'expression du travail élémentaire du système

$$\delta \mathcal{T} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k. \quad (42)$$

Nous voulons montrer ici que nos équations (17), et par conséquent aussi nos équations (16), sont bien les équations (41) relatives aux paramètres

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \Omega_x, \\ q_2 = \Omega_y, \\ q_3 = \Omega_z, \end{array} \right\}$$

absolument indépendants, fixant, à chaque instant, la position de chaque point M du système; Ω_x, Ω_y, Ω_z sont les composantes, suivant Ox, Oy, Oz, de la rotation angulaire

$$\overline{\int \overline{\omega dt}}.$$

(*) Voyez P. APPELL, *Comptes rendus*, août 1899; *Journal de Crelle*, t. CXXI; *Journal de Jordan*, t. VI, 1900; *Traité de méc. rat.*, t. II, 2e éd., 1904; A. DE SAINT-GERMAIN, *Comptes rendus*, t. CXXX, 1901.

En substituant les valeurs (8) des composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse absolue $\bar{v}$ dans les expressions (18) de celles des composantes J_x, J_y, J_z de l'accélération absolue $\bar{J}$, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} J_x = \dfrac{dw_x}{dt} + \left(\omega_y \dfrac{dz}{dt} - \omega_z \dfrac{dy}{dt}\right) + \left(z\dfrac{d\omega_y}{dt} - y\dfrac{d\omega_z}{dt}\right) \\ \quad + q[w_x + \omega_x y - \omega_y x] - r[w_y + \omega_z x - \omega_x z], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (43)$$

Remarquons que les dérivées deuxièmes de nos paramètres sont

$$\left\{\begin{array}{l} q_1'' = \dfrac{d^2\Omega_x}{dt^2} = \dfrac{d\omega_x}{dt}, \\ q_2'' = \dfrac{d^2\Omega_y}{dt^2} = \dfrac{d\omega_y}{dt}, \\ q_3'' = \dfrac{d^2\Omega_z}{dt^2} = \dfrac{d\omega_z}{dt}. \end{array}\right\} \quad (44)$$

Par suite, en dérivant les valeurs (43), nous avons

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial J_x}{\partial q_1''} = 0, & \dfrac{\partial J_x}{\partial q_2''} = +z, & \dfrac{\partial J_x}{\partial q_3''} = -y, \\ \dfrac{\partial J_y}{\partial q_1''} = -z, & \dfrac{\partial J_y}{\partial q_2''} = 0, & \dfrac{\partial J_y}{\partial q_3''} = +x, \\ \dfrac{\partial J_z}{\partial q_1''} = +y, & \dfrac{\partial J_z}{\partial q_2''} = -x, & \dfrac{\partial J_z}{\partial q_3''} = 0. \end{array}\right\} \quad (45)$$

Si nous calculons l'énergie d'accélération absolue

$$2S = \Sigma m(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)$$

au moyen des expressions (43), nous voyons qu'elle ne contient, comme dérivées deuxièmes, que celles des paramètres $q_1 = \Omega_x$, $q_2 = \Omega_y$, $q_3 = \Omega_z$. De plus, d'après l'expression (29) du travail

virtuel des forces extérieures, nous apercevons immédiatement que

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1 = L, \\ Q_2 = M, \\ Q_3 = N. \end{array}\right\} \quad (46)$$

En écrivant donc les équations (41), nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} L = Q_1 = \dfrac{\partial S}{\partial q_1''} = \Sigma m \left(J_x \dfrac{\partial J_x}{\partial q_1''} + J_y \dfrac{\partial J_y}{\partial q_1''} + J_z \dfrac{\partial J_z}{\partial q_1''} \right) \\ \qquad\qquad = \Sigma m \, (J_z y - J_y z), \quad \text{et de même} \\ M = \Sigma m (J_x z - J_z x), \\ N = \Sigma m (J_y x - J_x y), \end{array}\right\}$$

en vertu des valeurs (45).

Ces dernières équations ne sont autre chose que celles (17) qui traduisent le principe de d'Alembert. En appliquant le même mode de transformation, nous obtiendrons encore pour équations du mouvement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df}{dt} + qh - rg = L, \\ \dfrac{dg}{dt} + rf - ph = M, \\ \dfrac{dh}{dt} + pg - qf = N. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Enfin remarquons encore, avec P. Appell (*), que le théorème sur l'énergie d'accélération ne fait que traduire le *principe de la moindre contrainte* de Gauss (**).

(*) *Mécanique rationnelle*, t. II, 2e éd., 1904, pp. 384 et 469.

(**) *Journal de Crelle*, t. IV. Voyez aussi LAGRANGE, *Mécanique analytique* publiée par J. Bertrand, t. II, note 9, p. 357.

BIBLIOGRAPHIE.

Voici la liste la plus complète des ouvrages et mémoires que nous ayons pu dresser : ces travaux regardent non seulement la variation des latitudes, mais aussi les problèmes géophysiques qui y touchent et les théories mécaniques et physiques que nous avons eu à employer dans ce qui précède.

Citons d'abord les ouvrages classiques :

LAPLACE, *Traité de Mécanique céleste*, t. V.

S.-D. POISSON, Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre. (*Journal de l'École polytechnique*, 15e cahier.)

IDEM, Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. (*Mémoires de l'Institut*, t. VII et IX.)

POINSOT, Précession des équinoxes. (*Addition à la Connaissance des Temps pour 1858.*)

J.-A. SERRET. Théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. V, 1859.)

IDEM, Mémoire sur l'emploi de la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation. (*Mémoires de l'Institut*, t. XXXV.)

Ces travaux n'envisagent que la théorie du mouvement de rotation d'un globe rigide.

Viennent ensuite les mémoires qui concernent notre problème et tout ce qui y touche. On remarquera que nous suivons l'ordre chronologique suivant lequel les auteurs sont intervenus dans la question, mais que nous ne séparons pas cependant les ouvrages d'un même auteur parus à des dates très éloignées.

E. KANT. Untersuchung der Frage, ob die Erde eine Veränderung ihrer Axenlage erlitten habe? 1754. (Voyez *OEuvres de Kant*, édition Hartenstein, Leipzig, 1838, et *Moniteur scientifique*, 1866, pp. 224 et 321.) (Cf. R. MAYER. Beiträge zur Dynamik des Himmels, Heilbronn, 1848.)

LAGRANGE. *Mécanique analytique,* t. II. 1815. section IX. et fragments II et III.

BESSEL. Einfluss der Veränderungen des Erdkörpers auf die Polhöhen. (*Zeitschrift für Astr.*, 1818, t. V. p. 25; *Abhandlungen*, t. III, p 304; Correspondance avec Olbers, 1814 et 1817.)

W. HOPKINS. Researches in physical Geology. (*Philosophical Transactions*, Londres. 1839, 1840 et 1842.)

IDEM. Intern. temp. and thickness of the crust... (*R. S. Proceedings*, t. III, 1858-1862.)

KLEE. Der Urzustand der Erde und die Hypothese von einer Aenderung der Pole, 1843.

D'ARCHIAC, *Histoire des progrès de la géologie,* t. I. 1847.

R. MAYER, Beiträge zur Dynamik des Himmels, Heilbronn, 1848.

BELLI. Pensieri sulla consistenza e sulla densità della crosta solida terrestre. (*Giornale dell. I. R. Ist. Lombard. di Sc.*, nouvelle série, t. X, Milan, 1851.)

H. HENNESSY. Researches in terrestrial Physics. (*Phil. Trans.*, Londres, 1851.)

IDEM, Remarques à propos d'une communication de M. Delaunay. (*Comptes rendus*, Paris, 6 mars 1871; *Nature*, 1872.)

IDEM, On the limits of hypotheses... (*Philosophical Magazine* [5], t. VI, 1878, pp. 263-267.)

HAEDENKAMP, Veränderungen der Rotationsaxe der Erde. (*Poggendorffs Annalen*, t. XC, 1853.)

PLANA. *Astronomische Nachrichten,* nos 860 et 861, mai 1853.

W. FERREL. Effect of the Sun and Moon upon the rotatory motion of the Earth. (*Astronomical Journal*, t. III, 1853.)

IDEM, Influence of the tides in causing an app. sec. accel., 1864.

IDEM, Influence of the rot. veloc. of the Moon on the length of the year. 1865. (*Proceed. of Am. Ac.*, t. VI, 1866.)

J. LIOUVILLE, Développements sur un chapitre de la Mécanique de Poisson. (*Addition à la Connaissance des Temps pour 1859*, 1857; *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. III, 1858.)

W. THOMSON, On the rigidity of the Earth. (*Phil. Trans.*, Londres, 1863.)

IDEM, Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells. (*Ibid.*, Londres, 1863.)

IDEM, On the free oscillat. of fluid spheres. (*Ibid.*, Londres, 1863.)

W. Thomson. Report of the British Assoc. for the Advancement of Science. Londres, 1878. (*American Journal of Science,* t. XII, 1876; *Arch. de Genève* [2]. t. LVII, 1876.)

Idem, Appendice *C* du mémoire de G. H. Darwin : Influence of the Geological changes... (*Phil. Trans.*, Londres, 1877.)

Idem, *Mathematical and physical Papers,* Londres, t. III, 1890.

Idem, *Popular Lectures and Addresses,* t. III.

Idem avec P. G. Tait, *Treatise on natural Philosophy,* t. II, 1883.

J. Croll, Influence of the tidal Wave on the Earth's rotation. (*Philosophical Magazine,* t. XXVII, 1864.)

Idem, On the hypothesis of a change of climate trough changes in the obliquity of the ecliptic... (*Geological Magazine*, Londres, 1878.)

Idem, *American Journal of Science* (3), t. XVI, 1878.

J. Bertrand, Sur l'accélération du moyen mouvement de la Lune. (*Comptes rendus*, Paris, 22 janvier 1866.)

Delaunay, Sur l'existence d'une cause nouvelle... (*Comptes rendus*, Paris, 11 décembre 1865 et 29 janvier 1866.)

Idem, Sur l'hypothèse de la fluidité interne du globe terrestre. (*Comptes rendus,* Paris, 13 juillet 1868.)

Ch. Dufour, Sur l'accél. séc. du mouvement de la Lune. (*Comptes rendus,* Paris, 9 avril 1866.)

J. Evans, On a poss. geol. cause of changes in the position of the Earth's axis. (*Geological Magazine,* 1866; *Proceedings of the Royal Society,* Londres, 1867; *Quarterly Journal of R. S.,* 1876, t. XXXII.)

E. J. Stone, On the poss. of a change... (*Monthly Notices*, Londres, t. XXVII, mars 1867.)

Y. Villarceau, *Comptes rendus,* Paris, 23 décembre 1867; *Annales de l'Observatoire de Paris,* t. VIII.

J. H. Pratt, *A Treatise on attractions... and the figure of the Earth,* 4e édition, 1871.

H. Gyldén, Ueber den Einfluss, welchen Aenderungen der Rotationsaxe der Erde... (*Bull. Ac. Sc.*, Saint-Pétersbourg, t. IV, 1870.)

Idem, Recherches sur la rotation de la Terre. (*Nova Acta Soc. Reg. Upsaliensis,* 3e série, t. VIII, 1er fascicule, 1871.)

Idem, Ueber die Rotation eines festen Kerns... (*Astr. Nachr.,* 1878, no 2226.)

Idem, Rotationslagarne för en fast kropp, hvars yta är betäckt af ett flytande ämne. (*Bull. Ac.*, Stockholm, 1878, no 7 et 1879, no 3.)

H. Résal, Mouvement d'un corps solide relié à un système matériel. (*Annales de l'École normale*, 1872.)

Idem, *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, 1884.

J. G. Barnard, Problems of rotary motion. (*Smithsonian Contributions of Knowledge*, t. XIX, 1874 et t. XXIII, 1881.)

H. Schultz, *Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft*, Leipzig, 1874, pp. 199-213.

T. Mellard Reade, *American Journal of Science* (3), t. XIII, 1875, p. 314.

Stark, Ueber die Möglichkeit einer Axenänderung der Erde, Munich, 1875.

E. Mathieu, Mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité. (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. II, 1876.)

J. Carret, Le déplacement polaire; preuves des variations de l'axe terrestre. Paris, 1876. (*Bull. de la Soc. géogr.*, Paris, 6e série, t. XII, 1876.)

A. Waters, Influence of the position of land and sea upon a shifting of the Earth's axis. (*British Assoc. Report*, 1877.)

Idem, Table of effect of movement of the surface of the globe. (*Manchester Lit. and Phil. Soc*, 1877, t. IV.)

Idem, Inquires concerning a change in the position of the Earth's axis. (*Manchester Lit. and Phil. Soc.*, 1879, t. VI.)

G. H. Darwin, Influence of geological changes on the Earth's axis of rotation, (*Phil. Trans.*, Londres, 1877, t. CLXVII.)

Idem, On Prof. Haughton estimate of geological time. (*Proceed. R. S.*, Londres, t. XXVII, 1878; *Nature*, t. XVIII, 1878.) (Cf. *Astr. Nachr.*, n° 2294 : Zur Geschichte des Mondes und der Erde.)

Idem, On the bodily tides of viscous and semielastic spheroids. (*Philosophical Transactions*, Londres, 1879, part. A.)

Idem, Problems connected with the tides of a viscous spheroid. (*Ibid.*, Londres, 1880.)

Idem, Precession of a viscous spheroid. (*Ibid.*, Londres, 1880.)

Idem, The forced oscillations of a fluid spheroid. (*Ibid.*, Londres, 1880.)

Idem, Tidal friction of a planet... (*Ibid.*, Londres, 1881.)

Idem, Stresses in the interior of the Earth. (*Ibid.*, Londres, 1882.)

Idem, *The Tides*, Londres, 1898.

Idem, *Monthly Notices*, Londres, 1899, t. LX, n° 2.

Idem, *Encyclopädie der math. Wiss.*, t. VI, 1re partie, section B, art. 1.

Airy, The interior of the Earth. (*Add. Cambridge Assoc.*, 1878; *Nature*, t. XVIII, 1878.)

Lloyd Morgan, On geological time. (*Geological Magazine*, Londres, 1878.)

Twisden, The deplacement of the Earth's axis. (*Manchester Lit. and Phil. Soc.*, 1878; *Quarterly Journal of Geol. Soc.*, Londres, 1878.)

S. Haughton, Notes on physical Geology (*Proceed. of R. Soc.*, Londres, 1878, t. XXVI) : On the amount of shifting of the Earth's axis; On a new method of finding limite...

Fisher, On the effect upon the ocean tides of a liquid substratum beneath the Earth's crust. (*Philosophical Magazine*, 1882; *Geol. Magazine*, 1878; *Cambridge Trans.*, 1878.)

F.-R. Helmert, *Vierteljahrschrift der astr. Gesellschaft*, Leipzig, 1878, pp. 309-316.

Idem, *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, Leipzig, t. II, 1884, chap. V.

Idem, Zur Erklärung der beobachteten Breitenänderungen. (*Astronomische Nachrichten*, n° 3014, 1891.)

Idem, *Sitzungsber. der K. A. d. Wiss.*, Berlin, 1901, p. 328.

E. Hill, Elementary discussion of the influence of geological changes... (*Proceed. Phil. Soc. Cambridge*, t. III, 1868; *Nature*, 1878.)

Idem, On the possibility of changes in the Earth's axis... (*Geological Magazine*, Londres, 1878.)

F. Folie, *Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique* (3), t. II-XXXII, *passim*; *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Belgique*, 1884 et 1898; *Comptes rendus*, Paris, 1882 et 1893; *Annales de l'Observatoire royal de Belgique*, 1886-1893; *Cosmos*, mai 1895; *Acta mathematica*, t. XVI, 1892, etc.

A. Ritter, *Wiedemanns Annalen* (mémoires), Hanovre, 1879.

K. Zöppritz, Der gegenwärtige Standpunkt der Geophysik. (*Geographisches Jahrbuch*, Gotha, 1880, p. 1.)

Idem, Mittel und Wege zur besserer Kenntniss vom inneren Zustand der Erde. (*Verh. des I. deutsch. Geogr.*, Berlin, 1882.)

Lagrange, *Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique* (3), t. XXVII, XXVIII, *passim*.

Roche, Mémoire sur l'état interne du globe terrestre, Paris, 1881.

C. Rozé, Des termes à courte période... (*Comptes rendus*, Paris, août 1882.)

Th. von Oppolzer, *Lehrbuch der Bahnbestimmung*, t. I, 1882. (Edition française par E. Pasquier, t. I, 1886.)

IDEM, Ueber eine Ursache welche den Unterschied... (*Astr. Nach*, n° 2573; *Bull. astr.*, t. I, 1883, pp. 109 et 212.)

S. NEWCOMB, On the possible variability of the Earth's axial rotation. (*American Journal of Science*, 1874; *Astronomical Papers*, t. I, 1882.)

IDEM, On the Dynamics of the Earth's rotation with respect to the periodic Variation of Latitude. (*Monthly Notices*, mars 1892, t. LII, n° 5.)

IDEM, Statement of the theoretical laws of the polar motion. (*Astronomical Journal*, 1900, n° 452.)

IDEM, Remarks on Mr. Chandlers Law... (*Astron. Journal*, t. XI, XII, XIX, *passim*.)

LASAULX, Das Erdball als Ganzes. (*Handwörterbuch. der Min. Geol. und Paleont.*, 1882-1887.)

J.-V. SCHIAPARELLI, Variazione dell'asse di rotazione. (*Club Alpino*, 1883.)

IDEM, De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques, Saint Pétersbourg, 1889. (*Il Nuovo Cimento* (3), t. XXX, 1891.)

E.-J. ROUTH, *Dynamics of a system of rigid bodies*, 4e édition, 1884, t. II.

S. OPPENHEIM, Rotation und Präcession eines flussigen Sphäroids. (*Sitzungsber. der K. Ak. d. Wiss.*, Vienne, t. XCII, 1885; *Astr. Nachr.*, 1885, n° 2701.)

P. SCHWAHN, Ueber Aenderungen der Lage der Figur- und der Rotationsaxe der Erde..., Berlin, juin 1887 (thèse de doctorat).

E. RONKAR, Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles..., Bruxelles, 1888.

IDEM, Sur l'entraînement mutuel de l'écorce et du noyau terrestres, Bruxelles, 1889. (Voyez aussi *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (3), t. XIV, 1887 et t. XVIII, 1889.)

C. CHREE, *Quarterly Journal*, 1888, t. XXIII, p. 11.

BRYAN, *Philosophical Transactions*, 1889, part. *A*, p. 208.

F. TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, 1891, chap. XXIX et XXX. (Notes dans le *Bulletin astronomique, passim*.)

R. RADAU, Notes et analyses dans le *Bulletin astronomique, passim;* chapitre XXIX et XXX du tome II du Traité de Mécanique céleste de F. Tisserand.

IDEM, Note sur le mouvement de rotation d'un système de forme variable. (*Bull. astron.*, t. VII, février 1890, p. 63.)

IDEM, Note au sujet de la variation des latitudes. (*Bull. astron.*, t. VII., septembre 1890, p. 352; *Comptes rendus*, Paris, t. CI, octobre 1890, p. 558.)

J. Lamp, Ueber Niveauschwankungen der Ozeane, als eine mögliche Ursache der Veränderlichkeit der Polhöhe. (*Astr. Nachr.*, n° 3014, 1891.)

A. E. H. Love, *A Treatise on Elasticity*, Cambridge, 1892.

Idem, *Encyclopädie der math. Wissenschaften*, t. IV, art. 15 et 16, 1901.

V. Volterra, Divers mémoires dans le tome XXX des *Atti della R. Accad. d. Sc.* de Turin, 1895 (*passim*); dans les tomes XXIII et XXIV des *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1895 et 1896; dans les *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, septembre 1895; dans les *Astronomische Nachrichten* (nos 3291-3292), 1895. Ces mémoires sont réunis dans le travail : Sur la théorie des variations des latitudes. (*Acta mathematica*, t. XXII, 1898 et 1899.)

H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1895.

S. S. Hough, On the oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. (*Phil. Trans.*, Londres, 1895, part. *A*, p. 469.) (Voyez aussi *Phil. Trans.*, 1897.)

Idem avec I. Newton, On the rotation of an elastic spheroid. (*Phil. Trans.*, Londres, 1896. part. *A*, p. 319.)

Idem, Recherches sur la loi de périodicité... (*Monthly Notices*, 1897.)

R. S. Woodward, Mechanical Interpretation of Variations of Latitude. (*Astronomical Journal*, t. XV, 1896, n° 345, pp. 61-72.)

J. Larmor, On the Free Eulerian Precession. (*Proceed. Cambridge Phil. Soc.*, t. IX [3], p. 183. mai 1896).

L. Picart, Notes et analyses dans le *Bulletin astronomique, passim.*

Idem, Sur la rotation d'un corps variable. (*Ann. de l'Observ. de Bordeaux*, t. VII, 1897, p. 1.)

R. Spitaler, Die Ursache der Breitenschwankungen. (*Denkschriften des K. Ak. d. Wiss.*, Vienne, t. LXIV, 1897.)

Idem, Die periodischen Luftmassenverschiebungen und ihr Einfluss auf die Lagenänderungen der Erdachse. (*Petermanns Mitteilungen* [cahier complémentaire], n° 137, 1901.)

E. Wiechert, Ueber die Massenverteilung im Innern der Erde. (*Nachr. der K. Gesellsch.*, Gottingue [classe des sciences], 1897, 3e fascicule, p. 221.)

F. Gonnessiat, *Comptes rendus*, Paris, t. CXXIV, 1897, p. 938.

L. Grabowski, Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegungen. (*Sitzungsber. der K. Ak. d. Wiss.*, Vienne, 1898, t. CVII.)

J. Halm, On a pecular connection... (*Astr. Nachr.*, n° 3619, 1900.)

IDEM, Latitude variation. Earth magnetism and Solar activity. (*Ibid.*, n° 3649, 1900.)

W. G. THACKERAY, Note on Dr J. Halm's paper : On a peculiar connection... (*Ibid.*, n° 3635, 1900.)

SW. ARRHENIUS, *Kosmische Physik*, Leipzig, 1903.

F. KLEIN et A. SOMMERFELD, *Ueber die Theorie des Kreisels*, Leipzig, 1er fasc., 1897, chap. III, et 3e fasc., 1903, chap. VIII, section *B*.

R. SCHUMANN, Ueber die Polhöhenschwankung. (*Astr. Nachr.*, 1903, n° 3877.)

S. C. CHANDLER, *Astronomical Journal*, Boston, t. XI-XXIII.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN. Einige Bemerkungen über die Aenderungen der Polhöhen. (*Astr. Nachr.*, 1905, n° 3937.)

W. DE SITTER, *Astronomische Nachrichten*, 1905, n° 3981.

L. COURVOISIER, *Ibid.*, 1905, nos 3990-3991, 4012, 4031.

A. PANNEKOEK, *Ibid.*, 1905, nos 4008, 4024.

P. HARZER, Ueber die kosmische Strahlenberechung. (*Astr. Nachr.*, 1905, n° 4025.)

ETC.

Comme analyses nous citerons :

H. SCHULTZ, *Vierteljahrschrift der astr. Gesellsch.*, Leipzig, 1874, p. 199.

F. R. HELMERT, *Ibid.*, Leipzig, 1878, p. 309; *Die math. und phys. Th. der höh. Geodäsie*, 1884, t. II, chap. V.

P. SCHWAHN, Thèse : Ueber die Aenderungen... Berlin, 1887.

R. RADAU, Chapitre XXIX et XXX du tome II de la *Mécanique céleste* de F. Tisserand, 1891.

R. S. WOODWARD, *Astronomical Journal*, Boston, 1896, t. XV, n° 345, p. 61.

F. KLEIN et A. SOMMERFELD, *Ueber die Theorie des Kreisels*, 1903, 3e fasc., chap. VIII, section *B*.

Nombreuses notes dans le *Bulletin astronomique* (*passim*).

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, t. IV, art. 15, 16, 25; t. VI, 1re partie, section B, art. 1 et 2.

TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT 3

INTRODUCTION. 7

PREMIÈRE PARTIE.

Comparaison des résultats d'observation avec ceux de la théorie eulérienne 26

§ 1. Historique des observations 26
§ 2. Conclusion à tirer des observations. 42
§ 3. Comparaison entre la théorie eulérienne et l'observation. Raisons de la différence entre leurs résultats . . . 48

DEUXIÈME PARTIE.

Explication de la période chandlérienne au moyen de l'élasticité de la Terre 55

§ 1. Résumé très succinct des théories émises sur la composition du globe 55
§ 2. Influence de l'élasticité de la Terre sur la position de son axe de figure et sur son ellipticité. 65
§ 3. Variation de la période eulérienne due à l'élasticité de la Terre 75
§ 4. Calcul de ε_1 et ε_2. Théorème de W. Thomson et conclusion. 86

TROISIÈME PARTIE.

Explication des oscillations annuelles et apériodiques (oscillations de deuxième et troisième espèces) 117

SECTION *A*. — *Théorie du mouvement de rotation d'un corps variable.* 118

§ 1. Établissement des équations différentielles du mouvement. 118

§ 2. Emploi des équations différentielles établies; leur application à la solution du problème. Choix des systèmes d'axes mobiles 125

§ 3. Remarques relatives à l'application de la théorie à la rotation de la Terre 142

SECTION *B*. — *Influence des mouvements internes sur le déplacement du pôle* 156

LITTERA *a*. — *Influence directe* 160

LITTERA *b*. — *Influence indirecte*. 165

§ 1. Variation des axes principaux d'inertie due aux déplacements de masses 165

§ 2. Relation de position entre le pôle d'inertie C et le pôle de rotation I 194

§ 3. Applications diverses; « multiplication » de R. Radau . . 209

QUATRIÈME PARTIE.

Influence des phénomènes jouant le rôle de résistances passives . . 221

APPENDICE. Quelques mots d'explication sur le terme de H. Kimura. 237

NOTE. Complément à la section *A* de la Troisième partie . . . 241

BIBLIOGRAPHIE 261

ERRATA.

Pour rendre la figure 1 (*page* 11) plus claire, il convient de supposer l'arc de grand cercle IGC tracé *en trait plein*, ainsi que les extrémités des vecteurs $\overline{o}$, $\overline{OG_1}$ jusque I, G.

Pages.	*Lignes.*	*Au lieu de*	*Lire*
14	9 et 10	c'est-à-dire COG, est très petit et reste inférieur...	c'est-à-dire COG, et même $i + \theta_0 =$ COI sont très petits et restent inférieurs...
14	10, 11, 14, 15, 20	θ_0	$i + \theta_0$
15	1, 3	θ_0	$i + \theta_0$
15	4 en remontant	$\frac{C}{A} o . t$	$\frac{C}{A} \frac{\cos(i + \theta_0)}{\cos \theta_0} o . t$
17	6	θ_0	$i + \theta_0$
18	3, 4, 5	θ_0	$i + \theta_0$
20	note 2, ligne 2	$\cos \theta_0$	$\cos (i + \theta_0)$
26	note, ligne 3	*Belgigue*	*Belgique*
27	10	donnée	données
39	5	pollhodie	polhodie
43	7	*ferma*	*ferme*
48	5 en remontant	de ceux	et ceux
51	note, dern. ligne	*magnetisma*	*magnetism*
52	12	*qualificatif*	*qualitatif*
59	4 en remontant	sur le détail	dans le détail
63	note 2, ligne 1	*Procession*	*Precession*
66	6 en remontant	du premier	au premier
69	fig. 4	I,	I′

75	3	ϱ	ϱ_1
75	5 en remontant	$\frac{2\pi}{\lvert r \rvert}$	$\frac{2\pi}{\lvert \nu \rvert}$
85	5 en remontant	considérables,	considérables
87	1	gravitique	gravifique
88	8	approchée,	approchée
104	6 en remontant	$\frac{3\rho}{}$	$\frac{3\rho}{E}$
107	5	newtonnienne	newtonienne
114	1 en remontant	colatitude	latitude
123	9	intervalle du	intervalle de
127	2	$\frac{d\xi}{dt}$	$\frac{d\xi}{dt}$
128	10 en remontant	sont	soient
133	3	$-\mathrm{D}\frac{dr}{dt}$	$-\mathrm{E}\frac{dr}{dt}$
134	note 5, ligne 1	(	(v)
146	2	γ_1	$\gamma_1 \cdot C_0 r'$
146	11	$m\, v_z y$	$m(v_z y$
156	1	**Influence**	**Influence**
157	5	w	w_y
163	8	réelles;	réelles,
191	10 en remontant	annuels	météorologiques
193	note 1, ligne 2	PETERMANN'S	PETERMANNS
198	6 en remontant	$\frac{C \quad A}{A}$	$\frac{C-A}{A}$
198	2 en remontant	$\frac{C_0 - A_0}{A_0}$	$\frac{C_0 - A_0}{A_0}$
215	7 en remontant	S_i	S_i'
217	5	a,	a :
218	note 1, ligne 1	SOMMERFIELD	SOMMERFELD
224	note 3, ligne 1	§ 3	§ 2
231	2	actions passives	résistance passive

ADDENDA.

Page 16, note. Ajouter :

On voit facilement que l'angle $i = \mathrm{GOI}$ reste constant; en effet

$$\cos i = \frac{Ap}{\mathrm{G}} \cdot \frac{p}{o} + \frac{Aq}{\mathrm{G}} \cdot \frac{q}{o} + \frac{Cn}{\mathrm{G}} \cdot \frac{n}{o} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{G}o} = \mathrm{c^{te}},$$

H^2 désignant la constante des forces vives.

Page 57, note 3. Ajouter :

Consultez aussi *Encycl. der math. Wissenschaften*, t. VI-1-B, art. 1.

Page 61, note 4. Ajouter :

Cependant les dernières mesures de la vitesse de propagation des ondes sismiques semblent indiquer, pour la Terre, une rigidité notablement supérieure à celle de l'acier. (Cf. *Encycl. der math. Wiss.*, t. VI-1-B, art. 1, n° 37, p. 65.)

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE DE STEINER

(4e NOTE)

PAR

M. A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE LIÉGE

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE DE STEINER

1. — Depuis que Steiner a énoncé (*) ses célèbres théorèmes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements, on a donné de nombreuses démonstrations des propriétés de cette courbe remarquable. Mais il semble qu'on n'ait pas encore tenté de faire une théorie complète de $\mathfrak{H}$ (**) par les procédés de la géométrie élémentaire; cette étude ne paraît pas sans intérêt, car si les procédés analytiques sont plus généraux et font voir le lien qui unit les propriétés de la courbe en les faisant dériver, comme l'a fait Cremona (***), de théories générales, les méthodes géométriques sont souvent plus rapides et permettent d'examiner de plus près les questions de détail. Dans trois notes présentées à la Société royale des sciences de Liége (IV), nous avons établi

(*) CRELLE, t. LIII, pp. 231-237.

(**) Le symbole $\mathfrak{H}$ remplacera, dans la suite, les mots : hypocycloïde à trois rebroussements.

(***) CREMONA, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*. (CRELLE, t. LXIII, fasc. 2, pp. 101-120.)

(IV) *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, 3e série, t. IV, 1902. — *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, 3e série, t. VI, 1906. — *Note sur les hypocycloïdes tricuspidales inscrites à un triangle fixe*, 3e série, t. VIII, 1909.

géométriquement un grand nombre de propriétés de $\mathfrak{G}$; nous nous proposons, dans la note actuelle, de compléter cette étude en établissant géométriquement les propriétés de deux groupes de coniques déjà signalées par Cremonu (*loc. cit.*); nous démontrerons en outre plusieurs propositions qui nous paraissent nouvelles.

2. — Les deux points de rencontre M et M′ d'une tangente mobile à une $\mathfrak{G}$ avec le cercle tritangent à cette courbe se déplacent sur ce cercle avec des vitesses angulaires ω et ω' telles que $\omega' = -2\omega$. Comme précédemment (IV), ces points seront appelés le *point primaire* et le *point secondaire* de la tangente, et si S et ω représentent un sommet de $\mathfrak{G}$ et le centre de son cercle tritangent, l'angle SωM sera l'*angle directeur* de la tangente MM′; le point de contact de MM′ avec $\mathfrak{G}$ est symétrique de M′ par rapport à M.

Si par un point D (fig. 1) on mène à $\mathfrak{G}$ trois tangentes h_a, h_b, h_c et que l'on mène ensuite les tangentes a, b, c perpendiculaires à h_a, h_b, h_c, les droites a, b, c forment un triangle ABC dont h_a, h_b, h_c sont les hauteurs. Les points primaires et les points secondaires des tangentes a, b, c sont respectivement les milieux des côtés et les pieds H_a, H_b, H_c des hauteurs du triangle ABC. Les points de contact de a, b, c avec $\mathfrak{G}$ sont les symétriques de H_a, H_b, H_c par rapport aux milieux des côtés, et les normales en ces points se coupent en un point N symétrique de l'orthocentre D par rapport au centre O du cercle ABC.

On peut circonscrire à une $\mathfrak{G}$ une infinité de triangles analogues à ABC; nous les appelons les *triangles principaux* de $\mathfrak{G}$. Une $\mathfrak{G}$ est l'enveloppe des droites de Simson de l'un quelconque de ces triangles principaux.

3. — Supposons que le point D se déplace sur la droite AH_a; les tangentes AH_a et BC restent fixes, tandis que les tangentes AB et AC se déplacent de telle façon que le milieu de BC, qui est le point primaire de BC, reste fixe; le centre O du cercle ABC se

déplace donc sur une parallèle à AH_a; le rayon du cercle ABC reste d'ailleurs constant et égal au diamètre du cercle tritangent à $\mathfrak{G}$, donc : *si le centre* O *d'un cercle de rayon constant se déplace parallèlement à l'un des côtés* H_aA *d'un angle droit* CH_aA, *les droites qui joignent l'un des points de rencontre* A *de ce cercle avec le côté* AH_a *aux deux points de rencontre* B *et* C *du cercle avec le second côté enveloppent une* $\mathfrak{G}$.

On démontrerait sans difficulté que les droites qui joignent les points B et C au second point de rencontre du cercle mobile avec le côté AH_a enveloppent une $\mathfrak{G}$ symétrique de la première par rapport à BC.

4. — Deux droites rectangulaires et transversales réciproques l'une de l'autre par rapport au triangle ABC sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère circonscrite à ce triangle. Ces droites sont aussi les droites de Simson de deux points diamétralement opposés sur le cercle ABC; elles sont donc tangentes à $\mathfrak{G}$; par conséquent, une $\mathfrak{G}$ est sa propre transformée par transversales réciproques par rapport à l'un quelconque de ses triangles principaux; c'est une anallagmatique dans ladite transformation.

Si l'on mène à $\mathfrak{G}$ trois tangentes passant par un même point D′ et les trois tangentes perpendiculaires, on obtiendra un quadrangle orthogonal A′B′C′D′ circonscrit à $\mathfrak{G}$ et dont les côtés opposés sont des transversales réciproques par rapport à ABC. Donc :

Étant donné un quadrangle orthogonal ABCD, *on peut construire une infinité de quadrangles orthogonaux* A′B′C′D′ *dont les côtés opposés soient des transversales réciproques par rapport à chacun des triangles* ABC, ABD, ACD, BCD. *Réciproquement, les côtés opposés de* ABCD *sont des transversales réciproques dans les triangles* A′B′C′, A′C′D′, A′B′D′, A′C′D′ ; *tous ces quadrangles sont circonscrits à une même* $\mathfrak{G}$ *et le rayon du cercle* A′B′C′ *est constant.*

5. — Soient ABC et A′B′C′ (fig. 1) deux triangles principaux

quelconques (*) et D, D′ leurs orthocentres. Lorsqu'une droite δ tourne autour de D′, sa transversale réciproque par rapport à ABC enveloppe une conique Γ inscrite au triangle ABC; or les côtés du triangle A′B′C′ sont les transversales réciproques des droites D′A′, D′B′, D′C′ (4); ces côtés sont donc tangents à Γ. Ainsi deux triangles principaux quelconques ABC, A′B′C′ sont toujours circonscrits à une même conique.

Le centre K de Γ (fig. 1) est le point complémentaire de D′, c'est-à-dire que le centre de gravité G de ABC divise KD′ dans le rapport 1 à 2. Soient O et O′ les centres des cercles ABC et A′B′C′; les droites DO et D′O′ ont pour milieu commun le centre ω du cercle d'Euler des triangles ABC, A′B′C′ qui est

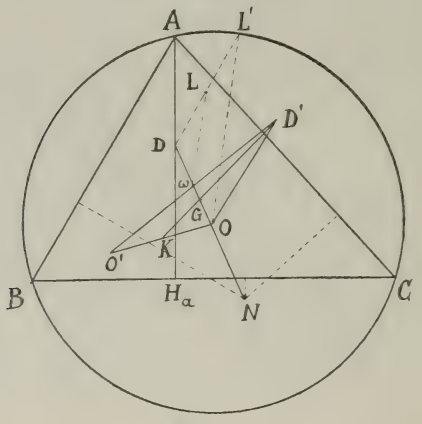


Fig. 1.

aussi le cercle tritangent à 𝔊; le point G divise la droite Oω dans le rapport 2 : 1, et comme ω est le milieu de O′D′, G est le centre de gravité du triangle OO′D′; or on a D′G′ = 2GK, par conséquent K est le milieu de OO′. Donc :

Deux triangles principaux d'une même 𝔊 sont circonscrits à une même conique dont le centre est au milieu de la droite qui joint les centres des cercles circonscrits à ces triangles.

(*) Les points A′, B′, C′ ne sont pas indiqués sur la figure.

Lorsque D et D′ coïncident, les triangles ABC, A′B′C′ coïncident aussi et la conique Γ est tritangente à $\mathfrak{H}$; son centre coïncide alors avec O.

6. — Les triangles ABC, A′B′C′ étant circonscrits à une même conique Γ sont inscrits à une autre conique (H); on peut engendrer cette conique de la façon suivante. Soit Δ une tangente à Γ; ses transversales réciproques δ et δ′ par rapport à ABC et à A′B′C′ se correspondent homographiquement et passent respectivement par D′ et par D. Leur point d'intersection décrit donc une conique (H) qui passe par D et par D′; lorsque Δ coïncide avec BC, δ coïncide avec D′A et δ′ avec DA, car (4) AD et BC sont des transversales réciproques par rapport à A′B′C′; la conique (H) est donc circonscrite aux quadrangles orthogonaux ABCD, A′B′C′D′ et est par conséquent une hyperbole équilatère. Donc :

Deux triangles principaux de $\mathfrak{H}$ *sont inscrits à une même hyperbole équilatère* (H) (*).

7. — Les hyperboles (H) satisfont à trois conditions. En effet, lorsque D est donné, les points A, B, C sont déterminés et les hyperboles H forment un faisceau ; une hyperbole (H) est déterminée quand on en donne deux points D et D′. Nous convenons de dire que ces hyperboles forment un *réseau hypocycloïdal.*

Le centre d'une hyperbole quelconque du réseau se trouve sur le cercle tritangent à $\mathfrak{H}$ et ses asymptotes sont deux tangentes rectangulaires de $\mathfrak{H}$.

Inversement, à toute hyperbole du réseau, on peut inscrire une infinité de triangles principaux. En effet, si D se déplace sur une hyperbole (H_1) du réseau, les sommets A, B, C du triangle principal dont D est l'orthocentre se déplacent aussi sur (H_1), car on a vu précédemment que toute hyperbole du réseau qui passe par D passe aussi par A, B, C. On conclut aussi de là que deux hyperboles (H_1) et (H_2) du réseau se coupent en

(*) Cremona, *loc. cit.*

quatre points A, B, C, D qui sont les sommets d'un quadrangle orthogonal circonscrit à $\mathfrak{G}$ (*).

8. — Le réseau hypocycloïdal peut encore être considéré comme engendré par toutes les hyperboles dont les asymptotes sont deux tangentes rectangulaires de $\mathfrak{G}$; c'est ainsi qu'il a été défini par Cremona.

Une $\mathfrak{G}$ est déterminée par quatre tangentes; si l'on prend pour déterminer $\mathfrak{G}$ deux couples de tangentes rectangulaires, deux hyperboles équilatères ayant pour asymptotes chacun de ces deux couples de droites seront des hyperboles du réseau hypocycloïdal déterminé par $\mathfrak{G}$ et se couperont en quatre points A, B, C, D formant un quadrangle orthogonal circonscrit à $\mathfrak{G}$. D'où une génération de $\mathfrak{G}$:

Si deux hyperboles équilatères varient de façon que leurs asymptotes supposées distinctes restent fixes, leurs six cordes d'intersection enveloppent une $\mathfrak{G}$.

9. — Le milieu de B'C' est le point primaire de cette tangente (2); donc *une hyperbole quelconque du réseau rencontre une tangente quelconque à* $\mathfrak{G}$ *en des points symétriques par rapport à son point primaire.* Il résulte de là que *toute hyperbole du réseau rencontre les côtés d'un triangle principal quelconque en des points isotomiques.*

Réciproquement, *toute hyperbole équilatère qui coupe les côtés d'un triangle principal quelconque en des points isotomiques appartient ou réseau.* Considérons en effet une hyperbole équilatère h coupant les côtés de ABC en des points isotomiques α et α', β et β', γ et γ' ; il existe une hyperbole du réseau qui passe par α et β; en vertu du théorème précédent, elle passera par α' et β' et coïncidera avec h.

10. — Soient P et Q, R et S (**) les points d'intersection de deux droites transversales réciproques par rapport au triangle

(*) Cremona, *loc. cit.*

(**) Le lecteur est prié de tracer la figure.

ABC avec un cercle c concentrique au cercle ABC. Considérons l'hyperbole équilatère h_1 qui passe par P, Q, R, S; le côté BC est coupé par h_1, par c et par le couple de droites PQ et RS en six points qui sont en involution. Or les deux derniers couples de points sont isotomiques sur BC, il en est donc de même du premier; l'hyperbole h_1 coupe donc les côtés de ABC en des points isotomiques et appartient par conséquent au réseau hypocycloïdal. Donc :

Le réseau hypocycloïdal est formé par toutes les hyperboles équilatères qui passent par les points d'intersection d'un cercle quelconque concentrique au cercle ABC *avec deux droites variables, transversales réciproques par rapport au triangle* ABC.

11. — Soit L (fig. 1) le centre d'une hyperbole (H_1) du réseau passant par A, B, C, D. L'orthocentre D est le centre d'homothétie du cercle ABC et du cercle d'Euler ω du triangle ABC, qui est aussi le cercle tritangent à $\mathfrak{G}$. Le point L', diamétralement opposé à D sur (H_1) est donc le quatrième point de rencontre de (H_1) avec le cercle ABC. Le rayon OL' du cercle ABC est parallèle au rayon ωL du cercle d'Euler et est double de ce rayon; si l'on suppose donc que (H_1) reste fixe et que L' décrive (H_1), la droite L'O restera constante en grandeur et en direction; le point D décrira aussi (H_1) et, par conséquent (7), le triangle ABC variera en restant inscrit à (H_1); les points A, B, C, seront donc les points d'intersection de (H_1) avec le cercle décrit de O comme centre avec OL' comme rayon. On a donc cette nouvelle génération de $\mathfrak{G}$:

Une extrémité L' *d'une droite* L'O *équipollente à une droite donnée décrit une hyperbole équilatère* (H_1); *le cercle décrit de* O *comme centre avec* OL' *comme rayon coupe* (H_1) *en trois nouveaux points* A, B, C. *Les côtés du triangle* ABC *enveloppent une* $\mathfrak{G}$.

12. — Lorsque le triangle principal ABC est rectangle en A (fig. 2), toutes les hyperboles du réseau qui sont circon-

scrites à ABC touchent en A la hauteur AH du triangle. Or le point A appartient alors au cercle tritangent à $\mathfrak{H}$; donc : *le cercle tritangent est le lieu des points de contact des hyperboles du réseau* (*).

Dans le cas où ABC est rectangle, le point A est le point primaire de la tangente AH perpendiculaire à BC et le point secondaire des tangentes AB et AC; les points B et C sont les points de contact de ces tangentes et la droite BC touche $\mathfrak{H}$ au

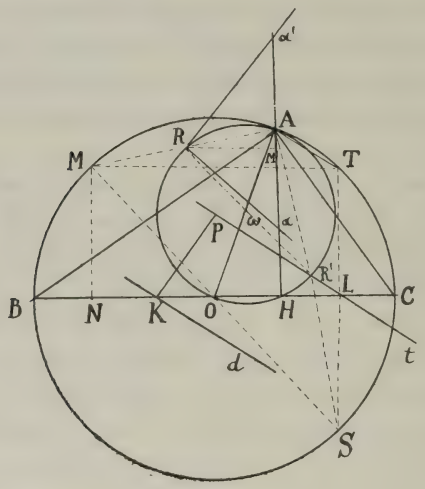


FIG. 2.

point K symétrique de H par rapport au milieu O de BC (2). Toute hyperbole (H_1) du réseau qui passe par A touche AH en A et passe par B et C (7); les points B et C sont donc deux des huit points de rencontre de $\mathfrak{H}$ et (H_1), et A est l'un des points d'intersection de (H_1) avec le cercle tritangent. On conclut de là que les huit points d'intersection de $\mathfrak{H}$ avec une hyperbole quelconque du réseau sont situés deux à deux sur quatre tangentes δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 de $\mathfrak{H}$ et que les quatre points d'intersection de cette hyperbole avec le cercle tritangent sont les points primaires des tangentes perpendiculaires à δ_1, δ_2, δ_3, δ_4.

(*) CREMONA, *loc. cit.*

On peut démontrer que les points de contact des tangentes δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 sont en ligne droite. Supposons que BC soit la tangente δ_1, et soient (fig. 2) R le centre de (H_1) et M le point du cercle ABC qui est symétrique de A par rapport à R. Si l'on porte sur AH des longueurs $A\alpha$, $A\alpha'$ égales à AR, les asymptotes de (H_1) seront les droites $R\alpha$ et $R\alpha'$, car ces droites sont rectangulaires et rencontrent la tangente AH à (H_1) en des points symétriques par rapport au point de contact A; la puissance p de (H_1) est égale à la moitié de la surface du triangle $R\alpha\alpha'$; si on abaisse RM′ perpendiculaire sur AH, on aura donc

$$p = \frac{1}{2} RM' \cdot AR.$$

Soient S le point diamétralement opposé à M sur le cercle ABC et T le symétrique de S par rapport à BC. La pédale t du point S est parallèle à AT et l'angle qu'elle forme avec BC a par conséquent pour mesure la demi-différence des arcs AB et CT, ou $\frac{1}{2}(AB - BM)$ ou $\frac{1}{2}AM$; cet angle est donc égal à l'angle ASM, et si P désigne la projection de K sur t, les triangles ASM et KPL sont semblables; on a donc

$$AM : MS = KP : KL,$$

ou

$$AM \cdot KL = 4r \cdot KP,$$

r désignant le rayon du cercle tritangent. Or AM est double de AR et KL est égal à NH ou à 2RM′; donc

$$2p = r \cdot KP \quad \text{ou} \quad KP = \frac{2p}{r}.$$

Lorsque l'hyperbole (H_1) est donnée, la tangente t est déterminée; son point primaire est le point R′ diamétralement opposé sur le cercle tritangent au centre R de (H_1). Si K′, K″, K‴ sont les points de contact des trois autres tangentes δ_2, δ_3, δ_4 obtenues en joignant deux à deux les six autres points de

rencontre de (H_1) avec $\mathfrak{H}$, la distance de chacun de ces points à la droite t sera égale à $\frac{2p}{r}$; donc les points K, K′, K″, K‴ sont situés sur une même droite d parallèle à t. Ainsi :

Si par les points de rencontre d'une droite avec une $\mathfrak{H}$ *on mène les tangentes* δ_1, δ_2, δ_3 δ_4 *à cette courbe, ces tangentes rencontrent de nouveau l'hypocycloïde en huit points qui sont sur une hyperbole équilatère* (H_1). *La puissance de cette hyperbole est égale à* $\frac{r\delta}{2}$, δ *désignant la distance de la droite* d *à la tangente à* $\mathfrak{H}$ *qui lui est parallèle; l'hyperbole* (H_1) *touche les tangentes perpendiculaires à* δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 *sur le cercle tritangent, en leurs points primaires. Lorsque* d *se déplace,* (H_1) *engendre un réseau hypocycloïdal.*

13. — Si la puissance p reste constante, la distance δ ne variera pas, donc : *l'enveloppe des droites* d *correspondant aux hyperboles du réseau qui sont égales à une hyperbole équilatère donnée est une courbe parallèle à* $\mathfrak{H}$.

14. — Prenons comme axe de x (*) le diamètre du cercle tritangent qui passe par un sommet σ de $\mathfrak{H}$ et pour axe des y le diamètre perpendiculaire. Soit α l'angle directeur de la tangente primaire menée par le centre R de (H_1); les angles directeurs des deux tangentes secondaires menées par ce point seront $-\frac{\alpha}{2}$ et $\pi - \frac{\alpha}{2}$. Les équations de ces trois tangentes seront donc

$$x\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2} = r\cos\frac{3\alpha}{2}, \quad (1)$$

$$x\cos\frac{\alpha}{4} + y\sin\frac{\alpha}{4} = r\cos\frac{3\alpha}{4}, \quad (2)$$

$$x\sin\frac{\alpha}{4} - y\cos\frac{\alpha}{4} = r\sin\frac{3\alpha}{4}. \quad (3)$$

(*) Le lecteur est prié de tracer la figure.

Or (H_1) a pour asymptotes les deux tangentes secondaires menées par R, son équation est donc

$$\left(x\cos\frac{\alpha}{4}+y\sin\frac{\alpha}{4}-r\cos\frac{3\alpha}{4}\right)\left(x\sin\frac{\alpha}{4}-y\cos\frac{\alpha}{4}+r\sin\frac{3\alpha}{4}\right)-p=0$$

ou

$$(x^2-y^2)\sin\frac{\alpha}{2}-2xy\cos\frac{\alpha}{2}+2r\left(x\sin\frac{\alpha}{2}+y\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$-r^2\sin\frac{3\alpha}{2}-p=0.$$

La tangente t est perpendiculaire à la tangente primaire menée par R; son équation s'obtiendra donc en remplaçant dans l'équation (1) α par $\pi+\alpha$:

$$x\sin\frac{\alpha}{2}+y\cos\frac{\alpha}{2}=-r\sin\frac{3\alpha}{2}.$$

L'équation de la droite d est donc

$$x\sin\frac{\alpha}{2}+y\cos\frac{\alpha}{2}=-r\sin\frac{3\alpha}{2}-\frac{2p}{r}.$$

Si cette droite passe par un point fixe H (x', y'), on aura

$$x'\sin\frac{\alpha}{2}+y'\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{r^2\sin\frac{3\alpha}{2}+2p}{r},$$

et l'équation de (H_1) peut alors s'écrire

$$(x^2-y^2)\sin\frac{\alpha}{2}-2xy\cos\frac{\alpha}{2}+2rx\sin\frac{\alpha}{2}+2ry\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$+2x'\sin\frac{\alpha}{2}+ry'\cos\frac{\alpha}{2}=0,$$

ou

$$x^2-y^2-r(2x+x')-[2xy-r(2y+y')]\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=0.$$

Lorsque α varie, cette hyperbole engendre un faisceau; donc :

Lorsque d *tourne autour d'un point fixe* P, *l'hyperbole* (H_1) *passe par quatre points fixes* P_1, P_2, P_3, P_4.

15. — Le quadrangle $P_1P_2P_3P_4$ par les sommets duquel passent une infinité d'hyperboles du réseau est nécessairement un quadrangle orthogonal circonscrit à $\mathfrak{C}$ La situation de P par rapport à ce quadrangle peut se définir assez simplement. Supposons que *d* coïncide avec l'une des trois tangentes menées de P à $\mathfrak{C}$. Les huit points de rencontre de l'hyperbole (H_1) avec $\mathfrak{C}$ sont alors : 1° les deux points de rencontre μ et μ' de *d* avec $\mathfrak{C}$, chacun de ces points devant être pris deux fois; 2° les quatre points de rencontre des tangentes en μ et μ' avec $\mathfrak{C}$; l'hyperbole (H_1) se réduit à ces deux tangentes qui coïncident donc avec deux côtés opposés P_1P_4 et P_2P_3 du quadrangle $P_1P_2P_3P_4$. On conclut de là que *les droites qui joignent les points de contact des couples de côtés opposés du quadrangle* $P_1P_2P_3P_4$ *passent par* P.

Soient Q_1, Q_2, Q_3 (fig. 3) les points de rencontre des côtés

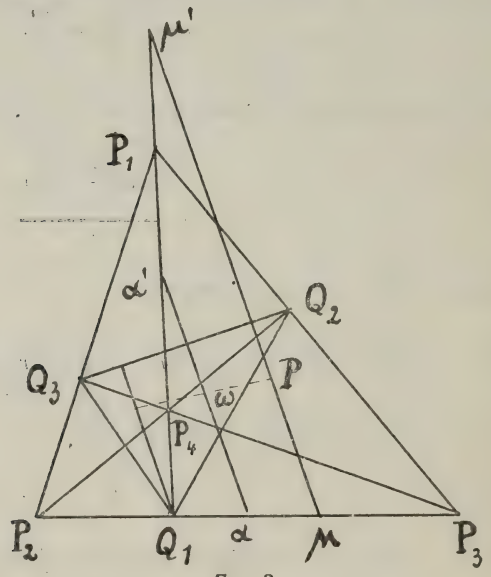


FIG. 3.

opposés du quadrangle $P_1P_2P_3P_4$; les points μ et μ' sont les symétriques de Q_1 par rapport aux milieux α et α' de P_2P_3 et P_1H_4 (2). Mais $\alpha\alpha'$ est perpendiculaire à Q_2Q_3 et passe par le centre ω du cercle $Q_1Q_2Q_3$, c'est-à-dire du cercle tritangent à $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$; la parallèle menée par Q_1 à $\mu\mu'$ est donc une hauteur du triangle $Q_1Q_2Q_3$ et est symétrique de $\mu\mu'$ par rapport à ω. Donc *le point* P *est le symétrique de l'orthocentre du triangle* $Q_1Q_2Q_3$ *par rapport au centre du cercle tritangent à* $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$.

16. — La première polaire d'une droite d par rapport à $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ est une conique tangente à la tangente double de $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, c'est-à-dire à la droite de l'infini; c'est donc une parabole. Cette parabole est tangente aux quatre droites δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 qui touchent l'hypocycloïde aux points où elle est rencontrée par la droite d. Nous allons donner des démonstrations élémentaires de quelques propriétés déjà connues (*) de cette courbe; nous démontrerons aussi quelques propriétés qui ne semblent pas avoir déjà été rencontrées.

Soient B′ et C′ (fig. 4) deux des points d'intersection de d et $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, AB, AC les tangentes en ces points et BC la tangente perpendiculaire à la troisième tangente AD menée par A; le triangle ABC sera principal et les points B′ et C′ seront les symétriques des pieds de hauteur BH_b et CH_c par rapport aux milieux des côtés AB et AC; le point de rencontre N des normales en B′ et C′ est donc le symétrique de l'orthocentre D par rapport au centre O du cercle ABC. Soit M le point de rencontre de AN avec le cercle ABC et soit PQ la pédale de M; cette droite est la tangente à $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ qui est parallèle à la droite d; on sait que le point primaire de PQ est le milieu R de DM.

Soient ω le centre du cercle tritangent et F le point de rencontre de ωR avec AN; si l'on considère le triangle DωR coupé par la transversale NMF, on a

$$\frac{ND}{N\omega} \times \frac{F\omega}{FR} \times \frac{MR}{MD} = 1.$$

(*) Cremona, *loc. cit.* Painvin, *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (Nouvelles Annales, 1870, p. 75.)

Mais

$$ND : N\omega = 4 : 5$$

et

$$MR : MD = 1 : 2,$$

on a donc

$$F\omega : FR = 5 : 2 \qquad \text{ou} \qquad \omega F = 3\omega R. \qquad (4)$$

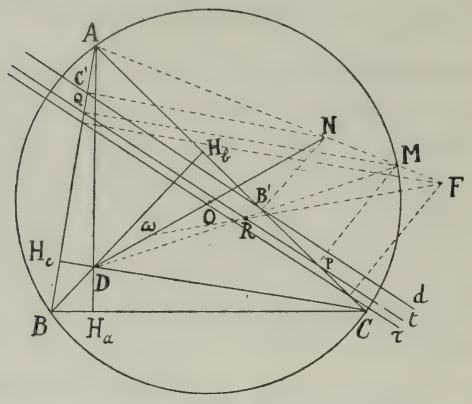


Fig. 4.

De même si l'on considère le triangle DMN coupé par la transversale ωRF, on a

$$\frac{FM}{FN} \times \frac{\omega N}{\omega D} \times \frac{RD}{RM} = 1,$$

d'où

$$FN = 3FM. \qquad (5)$$

Considérons la parabole p qui a pour foyer F et qui est tangente aux droites AB et AC. L'égalité (4) permet de construire le point F quand on connaît le point primaire R de la tangente t parallèle à d; la position de la tangente au sommet J de la parabole p est aussi connue quand on donne la droite d; en effet, elle est parallèle aux droites d et t et l'égalité (5) montre qu'elle divise extérieurement la distance de ces droites dans le rapport 3 : 1. La parabole p est donc déterminée quand

on connaît la droite d qui joint les points de contact B′ et C′ des tangentes AB et AC; il résulte de là qu'elle touche également les deux autres tangentes menées à $\mathfrak{H}$ aux points où cette courbe rencontre encore d.

On conclut de l'égalité (4) que le foyer F se trouve sur le cercle passant par les points de rebroussement de $\mathfrak{H}$, c'est-à-dire sur le cercle tritangent à la développée $\mathfrak{H}'$ de $\mathfrak{H}$. Ce point est le point primaire de la tangente à $\mathfrak{H}'$ qui est perpendiculaire à t; l'axe de p passant par F et étant perpendiculaire à d est donc normal à $\mathfrak{H}$. Donc :

L'axe de la parabole p *qui touche les quatre tangentes menées à une* $\mathfrak{H}$ *en ses points de rencontre avec une droite* d *est normal à cette courbe et perpendiculaire à la droite* d*; le foyer de cette parabole appartient au cercle tritangent à la développée de l'hypocycloïde. Ce foyer et l'axe de* p *restent fixes lorsque la droite* d *se déplace parallèlement à elle-même* (*).

17. — Soient (fig. 5) s le sommet de p, k, r les points de rencontre de l'axe Fs de p avec les droites d et t, et K, S, L les points de rencontre de ωF avec la droite d et avec la tangente au sommet et la directrice de p. Nous avons vu au paragraphe précédent que l'on a

$$\omega F = 3\omega R, \qquad RK = 2RS.$$

Or

$$SL = FS,$$

donc

$$\omega S + \omega L = \omega F - \omega S,$$

d'où

$$\omega L = \omega F - 2\omega S = 3\omega R - 2\omega S.$$

(*) Cremona, *loc. cit.* Painvin, *ibid.*

Or K divise RS dans le rapport $-2:3$, donc $3\omega R - 2\omega S = \omega K$ et, par conséquent,

$$\omega L = \omega K.$$

Donc : *La directrice de la parabole* p *est symétrique de la droite* d *par rapport au centre du cercle tritangent.*

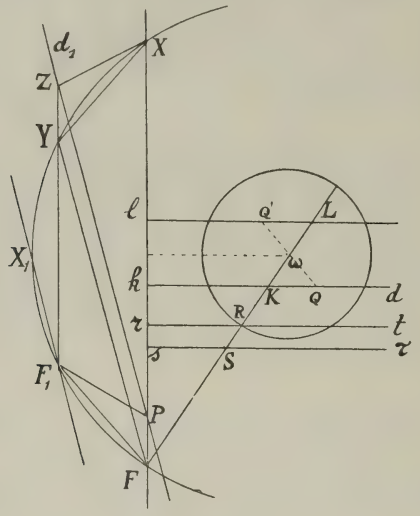


Fig. 5.

18. — La deuxième polaire de d par rapport à $\mathfrak{C}$ se réduit à un point P; ce point est aussi le pôle de d par rapport à la première polaire de d, c'est-à-dire par rapport à la parabole p; or d étant perpendiculaire à l'axe de p, son pôle est le symétrique de k par rapport au sommet s.

De l'égalité $s\mathrm{P} = sk$ on déduit

$$r\mathrm{P} - rs = rs + rk,$$

ou

$$r\mathrm{P} = 2rs + rk = 2rk.$$

Or r est le point de contact de t avec $\mathfrak{C}$. Donc : *la deuxième polaire d'une droite* d *par rapport à* $\mathfrak{C}$ *est un point* P *qui se trouve sur la normale perpendiculaire à* d *et à une distance du*

point d'incidence r *de cette normale égale au double de la distance de ce point à* d.

Réciproquement, *il existe trois droites* d, d′, d″ *dont les secondes polaires coïncident avec un point donné* P. *Ces droites sont les lignes homothétiques, par rapport à* P, *des tangentes menées à* $\mathfrak{G}$ *par les points d'incidence des trois normales menées de* P *à cette courbe, le rapport d'homothétie étant* 3 : 2.

19. — Lorsque d tourne autour d'un point fixe Q, la directrice Ll passe par le point Q′ symétrique de Q par rapport à ω et la tangente au sommet Ss enveloppe une courbe homothétique de $\mathfrak{G}$ par rapport à Q; nous allons chercher quel est, dans ce cas, le lieu de P. Soit (fig. 5) X le second point de rencontre de l'axe Fs de p avec le cercle tritangent à la développée de $\mathfrak{G}$. Des égalités

$$Fs = sl, \qquad Ps = sk,$$

on déduit

$$FP = kl,$$

d'où

$$Pl = Fk.$$

Or les points k et l sont symétriques par rapport au milieu de FX et, par conséquent, Fk est égal à XL. On a donc $Pl = xl$ et l est le milieu de XP. Lorsque d tourne autour de Q, Ll tourne autour de Q′; or on sait que si l'on construit le symétrique P du point secondaire X d'une tangente variable à une $\mathfrak{G}$ par rapport à la projection d'un point fixe Q′ sur cette tangente, le lieu de P est une ellipse tritangente à cette $\mathfrak{G}$ (*). Donc :

Lorsqu'une droite d *tourne autour d'un point fixe* Q, *le point* P *qui est sa seconde polaire par rapport à une* $\mathfrak{G}$ *fixe décrit une ellipse tritangente à la développée de cette* $\mathfrak{G}$.

(*) Voir notre note : *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 3e série, t. VI, 1906.)

En transformant cette propriété par voie de dualité, on obtient la proposition suivante :

Si un point parcourt une droite fixe q, *sa droite polaire par rapport à une cubique nodale fixe enveloppe une conique. Lorsque la droite* q *se déplace, cette conique reste tritangente à une cubique nodale fixe ayant même point double et mêmes tangentes en ce point que la cubique donnée.*

20. — Supposons que P décrive une droite d_1 et proposons-nous de chercher géométriquement l'enveloppe de la droite d. Soit F_1X_1 (fig. 5) la tangente à la développée de $\mathcal{C}$ qui est parallèle à d_1 ; l'arc XX_1 est double de FP_1, et si Y est son milieu, la droite EY est parallèle à F_1X_1 et à d_1. Soit Z le point de rencontre de F_1Y avec d_1, la figure FPZY est un parallélogramme et YZ = FP ; les triangles FPF_1 et XYZ sont donc égaux, par suite le trapèze F_1PXZ est isoscèle et la directrice Ll de p, qui par le milieu de PX, passe aussi par le milieu de F_1Z. Ainsi : le symétrique Z de F_1 par rapport à Ll se trouve sur d_1, donc, lorsque P décrit d_1, la droite Ll enveloppe une parabole ayant F_1 pour foyer et d_1 pour directrice. Or d est symétrique de Ll par rapport à ω, donc l'enveloppe de d est la parabole p_1 ayant pour foyer et pour directrice le point F_1' et la droite d_1', symétriques de F_1 et de d_1 par rapport à ω. Cette enveloppe est donc la première polaire de d_1.

21. — Soit ABC (fig. 6) le triangle formé par les tangentes menées à $\mathcal{C}$ par les points d'incidence A_1, B_1, C_1 des normales menées à $\mathcal{C}$ par un point P, et soit A'B'C' le triangle homothétique de ABC par rapport à P, le rapport d'homothétie étant 3 : 2. Nous avons vu que les droites B'C', C'A', A'B' admettent toutes trois comme seconde polaire le point P. Lorsque P décrit une droite d_1, les côtés du triangle A'B'C' enveloppent donc une même parabole p_1 première polaire de d_1. Donc, *si l'on prolonge la normale* PA_1 *menée d'un point* P *à une* $\mathcal{C}$ *d'une longueur* A_1A_1' *égale à la moitié de* PA_1, *la perpendiculaire élevée en* A_1' *sur* PA_1' *enveloppe une parabole lorsque* P *décrit une droite fixe.*

22 — Soient D l'orthocentre du triangle ABC et O le centre du cercle ABC (fig. 6) ; O est le milieu de PD. Le triangle ABC est principal, donc le centre ω du cercle tritangent à $\mathfrak{G}$ est au

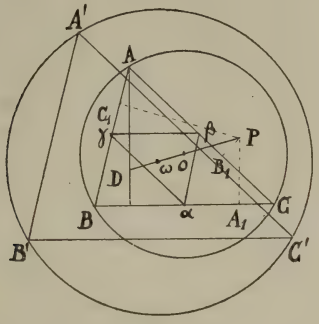
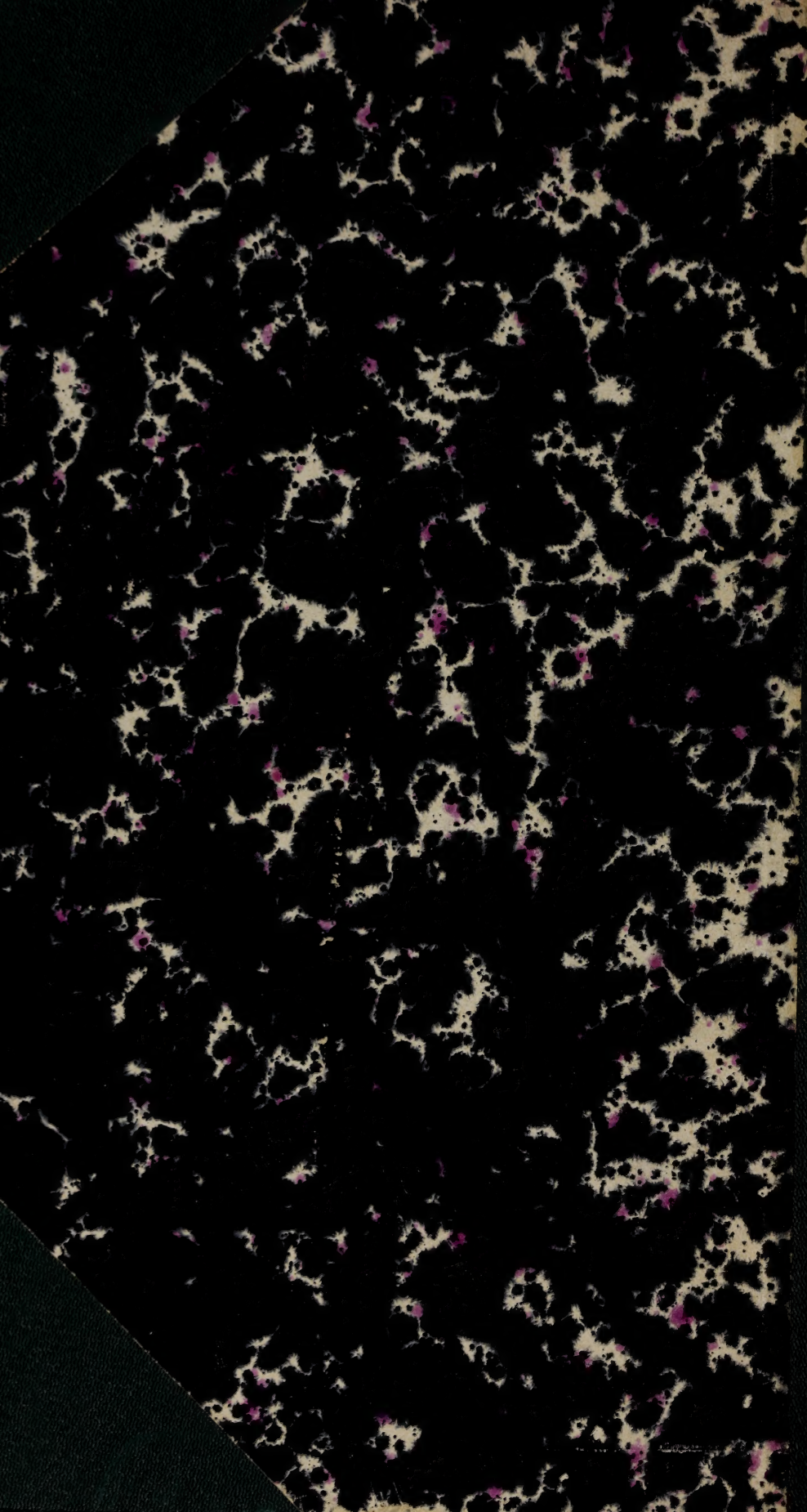


FIG. 6.

milieu de DO ; on conclut de là que le triangle A'B'C' est inscrit au cercle tritangent à la développée $\mathfrak{G}'$ de $\mathfrak{G}$, et lorsque P se déplace sur d_1, ce triangle varie en restant inscrit à ce cercle et circonscrit à la parabole p_1. Le triangle A'B'C' est homothétique par rapport à ω, au triangle αβγ qui a pour sommets les milieux des côtés de ABC ; la hauteur Oα du triangle αβγ est la symétrique par rapport à ω de la hauteur AD de ABC ; donc, lorsque P décrit d_1, les hauteurs de αβγ et celles de A'B'C' enveloppent des $\mathfrak{G}$. Il en est de même des parallèles menées par les sommets de A'B'C' aux côtés opposés, car ces droites sont les lignes homothétiques de BC, CA, AB par rapport à ω. Donc :

Si un cercle passe par le foyer d'une parabole, on peut inscrire à ce cercle une infinité de triangles circonscrits à la parabole ; les hauteurs de ces triangles et les parallèles menées par les sommets aux côtés opposés enveloppent deux $\mathfrak{G}$.

MCZ ERNST MAYR LIBRARY
3 2044 128 439 171